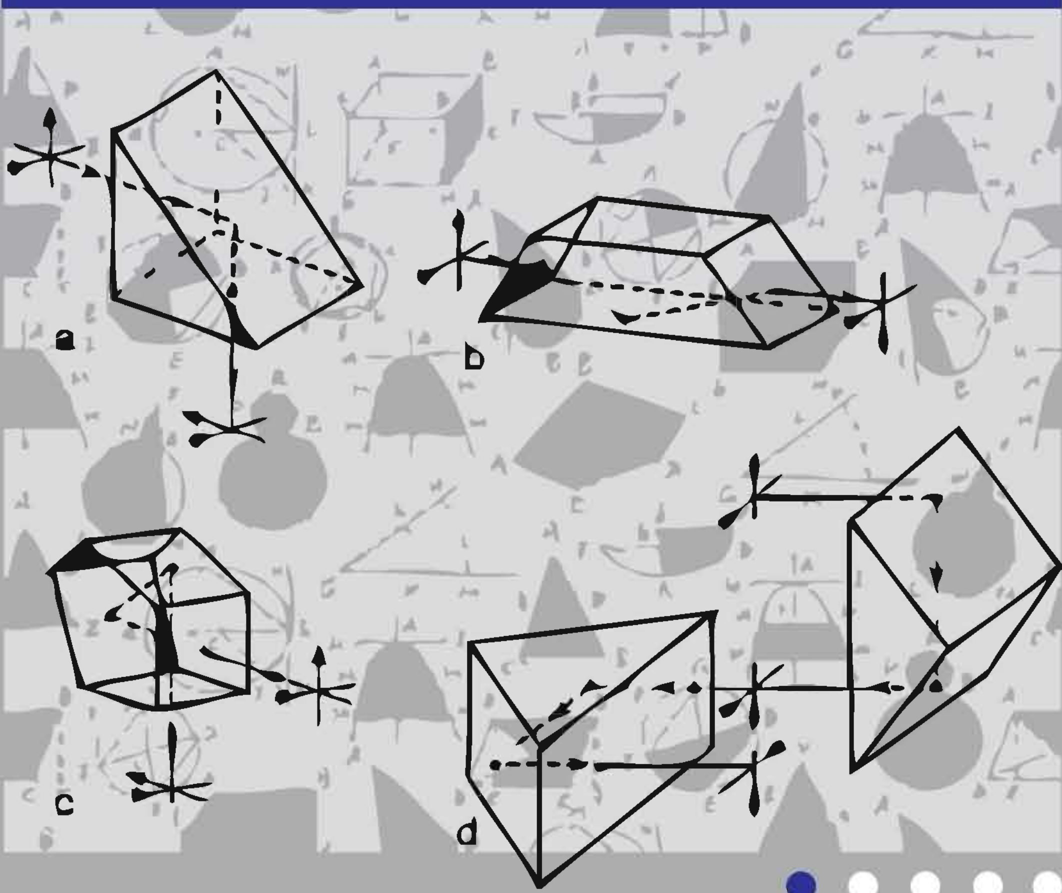
মাধ্যমিক উচ্চতর গণিত

জ্যামিতি



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা
কর্তৃক প্রকাশিত।

প্রথম মুদ্রণ : জানুয়ারি, ১৯৯৬
সংশোধিত ও পরিমার্জিত সংস্করণ : নভেম্বর, ২০০০
পরিমার্জিত সংস্করণ : ডিসেম্বর, ২০০৮
পুনর্মুদ্রণ :

কম্পিউটার কম্পোজ
লেজার স্ক্যান লিমিটেড
৯৫৬২৮৬৫, ৯৫৬৭৬০৮

প্রচ্ছদ
সেলিম আহ্‌মেদ

চিত্রাঙ্কন
কাজী সাইফুদ্দীন আব্বাস
সুশান্ত কুমার অধিকারী

ডিজাইন
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড

সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।

মুদ্রণ : অঙ্কুর আইসিটি ডেভেলপমেন্ট ফাউন্ডেশন (ওয়েব বিন্যাস)

প্রসঙ্গ কথা

শিক্ষার উন্নয়ন ব্যতীত জাতীয় উন্নয়ন সম্ভব নয়। স্বাধীনতা উত্তর বাংলাদেশের উন্নয়নের ধারায় জনগণের আশা-আকাঙ্ক্ষা, আর্থ-সামাজিক ও সাংস্কৃতিক জীবনপ্রবাহ যাতে পাঠ্যপুস্তকে প্রতিফলিত হয়, সেই লক্ষ্যে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি প্রণয়ন কমিটির সুপারিশক্রমে আশির দশকের প্রারম্ভে প্রবর্তিত হয় নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের নতুন পাঠ্যপুস্তক। দীর্ঘ এক যুগেরও বেশি সময় ধরে এ পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রচলিত ছিল।

উন্নয়নের ধারায় ১৯৯৪ সালে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম সংস্কার, পরিমার্জন ও বাস্তবায়নের জন্য "শিক্ষাক্রম প্রণয়ন ও বাস্তবায়ন সম্পর্কিত টাস্কফোর্স" গঠিত হয়। ১৯৯৫ সালে নতুন শিক্ষাক্রম অনুযায়ী পর্যায়ক্রমে ৬ষ্ঠ থেকে ৯ম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। সময়ের সাথে সাথে দেশ ও সমাজের চাহিদা পরিবর্তনের প্রেক্ষাপটে ২০০০ সালে নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক উচ্চ পর্যায়ের বিশেষজ্ঞদের দ্বারা যৌক্তিক মূল্যায়নের মাধ্যমে পুনরায় সংশোধন ও পরিমার্জন করা হয়। ২০০৮ সালে শিক্ষা মন্ত্রণালয় কর্তৃক গঠিত শিক্ষা বিষয়ক টাস্কফোর্সের সুপারিশে প্রচ্ছদ প্রণয়ন, বানান ও তথ্যগত বিষয় সংশোধনসহ পাঠ্যপুস্তক আকর্ষণীয় করা হয়েছে। আশা করা যায়, পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষক–শিক্ষার্থীর নিকট আরো গ্রহণযোগ্য ও সময়োপযোগী বলে বিবেচিত হবে।

শিক্ষাক্রমের আলোকে মূল্যায়নকে আরো ফলপ্রসূ করার জন্য দেশের সুধীজন ও শিক্ষাবিদগণের পরামর্শের প্রেক্ষিতে সরকারি সিদ্ধান্ত অনুযায়ী প্রতিটি অধ্যায় শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে। প্রত্যাশা করা যায়, এতে শিক্ষার্থীর মুখস্থনির্ভরতা বহুলাংশে হ্রাস পাবে এবং শিক্ষার্থী তার অর্জিত জ্ঞান ও অনুধাবন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে বা যে কোনো বিষয়কে বিচার–বিশ্লেষণ অথবা মূল্যায়ন করতে পারবে।

প্রযোজ্য ও প্রায়োগিক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহার সহজ করার জন্য জ্যামিতির ওপর বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করা হয়েছে। এ পুস্তকের বিষয়বস্তুতে যে সব বিষয় উপস্থাপন করা হয়েছে তা পাঠ করে শিক্ষার্থীরা মাধ্যমিক জ্যামিতির ধারণা ও প্রয়োগ সম্প্রসারণ করার দক্ষতা অর্জন করতে পারবে বলে আশা করা যায়। এছাড়াও উচ্চতর গণিতে ভেক্টর, ঘন জ্যামিতি ও ত্রিকোণমিতির প্রাথমিক ধারণাসমূহ সহজভাবে উপস্থাপন করা হয়েছে। গণিতের নিজস্ব বৈশিষ্ট্য অক্ষুণ্ন রেখে শিক্ষার্থীদের মাঝে গণিতমনস্কতা সৃষ্টি করা অপরিহার্য। এদিকে বিশেষ লক্ষ্য রেখে নতুন ধ্যান-ধারণা সহজভাবে এবং সম্ভাব্য ক্ষেত্রে অর্ধবাস্তব পর্যায়ে উপস্থাপন করা হয়েছে। ফলে শিক্ষার্থীরা নিজ প্রচেষ্টায় বা শিক্ষকের ন্যূনতম সহায়তায় বিষয়বস্তু আয়ত্ত করতে সক্ষম হবে।

আমরা জানি, শিক্ষাক্রম উন্নয়ন একটি ধারাবাহিক প্রক্রিয়া এবং এর ভিত্তিতে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। কাজেই পাঠ্যপুস্তকের আরো উন্নয়নের জন্য যে কোনো গঠনমূলক ও যুক্তিসংগত পরামর্শ গুরুত্বের সাথে বিবেচিত হবে। ২০২১ সালে স্বাধীনতার সুবর্ণ জয়ন্তীতে প্রত্যাশিত সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ার নিরন্তর প্রচেষ্টার অংশ হিসেবে শিক্ষার্থীদের বিজ্ঞানমনস্ক করে তোলার লক্ষ্যে বর্তমান সংস্করণে কিছু পরিমার্জন করা হয়েছে। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পরিমার্জিত পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রকাশ করতে গিয়ে কিছু ত্রুটি বিচ্যুতি থেকে যেতে পারে। পরবর্তী সংস্করণে পাঠ্যপুস্তকগুলো আরো সুন্দর, শোভন ও ত্রুটিমুক্ত করার চেষ্টা অব্যাহত থাকবে।

যাঁরা এ পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, যৌক্তিক মূল্যায়ন, সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন, তাঁদের জানাই ধন্যবাদ। যাদের জন্য পাঠ্যপুস্তকটি প্রণীত হল, আশা করি তারা উপকৃত হবে।

প্রফেসর মোঃ মোস্তফা কামালউদ্দিন

চেয়ারম্যান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

সূচিপত্র

প্রথম অধ্যায়

পূর্ব পঠিত বিষয়ের সংক্ষিপ্ত পর্যালোচনা

মাধ্যমিক জ্যামিতি খণ্ডে শিক্ষার্থীগণ কোণ, ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও বৃত্তের ধর্ম ও অন্যান্য বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে কতকগুলো উপপাদ্য ও সম্পাদ্য অনুশীলন করেছে। সে সব ধারণা মাধ্যমিক উচ্চতর গণিতের জ্যামিতি অংশের পঠনে ও অনুশীলনে অহরহ প্রয়োগ করতে হবে। ব্যবহারের সুবিধার্থে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ ও বৃত্ত সংক্রান্ত কিছু তথ্য সংক্ষেপে পুনরালোচনা করা হল। বিস্তারিত বিবরণের জন্য 'মাধ্যমিক জ্যামিতি' পুস্তকটি দেখা যেতে পারে।

১.১। ত্রিভুজ সংক্রান্ত তথ্য

১। দুইটি ত্রিভুজের সর্বসমতা :
দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হবে যদি–
(ক) একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়।
(খ) একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমান হয়।
(গ) একটির দুই কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হয়।
(ঘ) তারা উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ হয়, তাদের অতিভুজদ্বয় সমান হয় ও একটির এক বাহু অপরটির অনুরূপ বাহুর সমান হয়।

২। ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হলে তাদের বিপরীত কোণদ্বয় সমান এবং দুইটি কোণ সমান হলে তাদের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান।

৩। ত্রিভুজের দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর এবং দুইটি বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৪। ত্রিভুজের যেকোনো বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ ও ভূমির মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ভূমির উপর লম্ব এবং সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৬। ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

৭। ত্রিভুজের কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকগুলো সমবিন্দু। এই বিন্দু ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (incentre) যা ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

৮। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু, এই বিন্দু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (circumcentre) যা ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

৯। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু; এই বিন্দু ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (Orthocentre)। ঐ লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় দিয়ে উৎপন্ন ত্রিভুজই মূল ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ (Pedal triangle)।

১০। ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

১.২। চতুর্ভুজ সংক্রান্ত তথ্য

১। সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান, বিপরীত কোণদ্বয় সমান এবং কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

২। আয়তের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান, কোণগুলো সমান ও প্রত্যেকে এক সমকোণ এবং কর্ণদ্বয় সমান ও পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৩। রম্বসের চার বাহু সমান, বিপরীত কোণদ্বয় সমান, কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৪। বর্গের চার বাহু সমান, কোণগুলো সমান ও প্রত্যেকে এক সমকোণ এবং কর্ণদ্বয় সমান ও পরস্পর সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৫। সামান্তরিক, আয়ত, রম্বস ও বর্গের সাধারণ বৈশিষ্ট্য হল-
কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয় এবং প্রত্যেক কর্ণ প্রতিটি চিত্রকে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে। কেবলমাত্র বর্গ ও রম্বসের ক্ষেত্রে কর্ণদ্বয় সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

১.৩। বৃত্ত সংক্রান্ত তথ্য

১। বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন অন্য যেকোনো জ্যা–এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা–এর উপর লম্ব এবং বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যা–এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

২। বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী এবং বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা-এর দৈর্ঘ্য সমান।

৩। বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

৪। একই বৃত্তাংশস্থিত কোণসমূহ পরস্পর সমান।

৫। অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

৬। কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে, তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।

৭। বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

৮। বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

৯। বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

১০। দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করলে তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ হবে।

১.৪। সদৃশ ত্রিভুজ সংক্রান্ত তথ্য

১। দুইটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান এবং বিপরীতক্রমে দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হবে।

২। দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান ও সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।

৩। দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর বর্গের অনুপাতের সমান।

১.৫। জ্যামিতিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত তথ্য

১। একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।

২। একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক বা আয়ত একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হলে ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সামান্তরিক ক্ষেত্র বা আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

৩। পীথাগোরাসের উপপাদ্য: কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

৪। কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ এক সমকোণ হবে।

৫। ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(ক) ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য a এবং একই এককে উচ্চতা h হলে,

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\ ah$ বর্গ একক।

(খ) কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য a, b, c হলে,

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s\text{-}a)(s\text{-}b)(s\text{-}c)}$ বর্গ একক, যেখানে $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

৬। সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (ভূমি $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক

৭। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ $\times$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি) $\times$ (তাদের লম্ব দূরত্ব) বর্গ একক।

অনুশীলনী- ১

১। কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য $x^2 +1$, x^2-1, 2x যেখানে, $x > 1$ ত্রিভুজটি কিরূপ হবে ?

২। কোনো ত্রিভুজের দুইটি বহিঃস্থ কোণ সমান। ঐ ত্রিভুজটি কিরূপ ?

৩। কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুইটি কোণের সমষ্টির সমান। ত্রিভুজটি কী ধরনের ত্রিভুজ ?

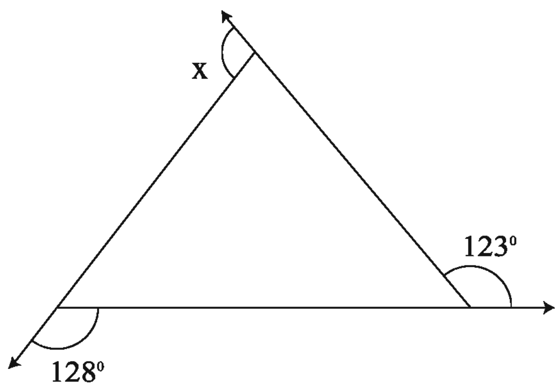
৪। কোনো সামান্তরিকের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 154^0 হলে, সামান্তরিকটির কোণগুলো নির্ণয় কর।

৫। একটি সামান্তরিকের (একই বাহুসংলগ্ন) দুইটি সন্নিহিত কোণের অনুপাত 7 ঃ 8 হলে, সামান্তরিকটির কোণগুলোর পরিমাপ কত ?

৬। কোনো রম্বসের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অনুপাত 5 ঃ 4 হলে, রম্বসটির কোণগুলো নির্ণয় কর।

৭। একটি ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে 8 মি. ও 4 মি. এবং ক্ষেত্রফল 28 বর্গমি. হলে, ভূমির বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

৮। পাশের চিত্র থেকে x কোণ নির্ণয় কর।



৯। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.5 সে. মি. হলে, তার বৃহত্তম জ্যা–এর দৈর্ঘ্য কত ?

১০। কোনো বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যা–এর দৈর্ঘ্য 16 সে. মি. ও 30 সে. মি. এবং বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 17 সে. মি. হলে, ঐ জ্যাদ্বয়ের ব্যবধান কত?

১১। কোনো বৃত্তে AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা এবং AD ও BC বৃত্তের ভিতরে O বিন্দুতে ছেদ করে। AO = 1.5 সে. মি. হলে, BO নিচের কোনটির সমান হবে ?

(ক) 1 সে. মি. (খ) 1.5 সে. মি. (গ) 2.0 সে. মি.

১২। কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ঐ বৃত্তের বৃত্তস্থ তিনটি বিন্দু A, P, B এবং $\angle APB = 90^0$ হলে, $\angle AOB$ কত ?

১৩। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC; AB কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্ত BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BD = 2 সে. মি. হলে, CD এর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি ?

(i) 2 সে. মি. (ii) 1 সে. মি. (iii) 1.5 সে. মি.

১৪। কোনো বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করায় উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ 120^0 হলে, তার বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের নিচের কোনটি হবে ?

(ক) 120^0 (খ) 60^0 (গ) 30^0

১৫। একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় ও একটি তির্যক বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3, 5 ও 2 সে. মি. অপর তির্যক বাহুর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি হবে ?

(ক) 4 সে. মি. (খ) 2 সে. মি. (গ) 1.5 সে. মি.

১৬। 3 সে.মি. ও 5 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের বৃহত্তরটির একটি জ্যা ক্ষুদ্রতরটির স্পর্শক হলে, এ জ্যা–এর দৈর্ঘ্য কত ?

১৭। কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD এবং AB ও CD বাহুর মোট দৈর্ঘ্য ১১ সে. মি. হলে, AD ও BC বাহুর মোট দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি হবে ?

(ক) 12 সে. মি. (খ) 10 সে. মি. (গ) 11 সে. মি.

১৮। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করেছে। তাদের একটি ব্যাসার্ধ 4 সে. মি. ও কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 7 সে. মি. হলে অপর বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ? বৃত্তদ্বয় অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করলে ঐ ব্যাসার্ধ কত হবে ?

১৯। ABCD চতুর্ভুজের A, B, C, D কোণগুলোর অনুপাত 1 ঃ 4 ঃ 5 ঃ 2 হলে, চতুর্ভুজটি কি বৃত্তস্থ হবে ?

২০। কি শর্তে দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে (ক) ছেদ করতে (খ) স্পর্শ করতে পারে ?

২১। A, B, C কেন্দ্রবিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করে এবং AB, BC, CA যথাক্রমে 5, 6, 7 সে. মি.। বৃত্ত তিনটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

২২। যখন দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে (ক) ছেদ করে (খ) ছেদ করে না (গ) বহিঃস্পর্শ করে (ঘ) অন্তঃস্পর্শ করে (ঙ) এককেন্দ্রিক হয়, তখন তাদের কয়টি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

২৩। কোনো বৃত্তের AB জ্যা–এর একই পার্শ্বে C, D দুইটি বৃত্তস্থ বিন্দু। A, C; B, C এবং B, D যোগ করা হল এবং AD কে E বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। $\angle BDE = 130^0$ হলে, $\angle ACB$ কত হবে?

২৪। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের কেন্দ্র O। A এবং BC ঐ কেন্দ্রের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। $\angle BOC = 120^0$ হলে, $\angle BAC$ কত হবে ?

২৫। ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। এর AB বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হল। $\angle CBE = 60^0$ হলে, $\angle ADC$ কত হবে ?

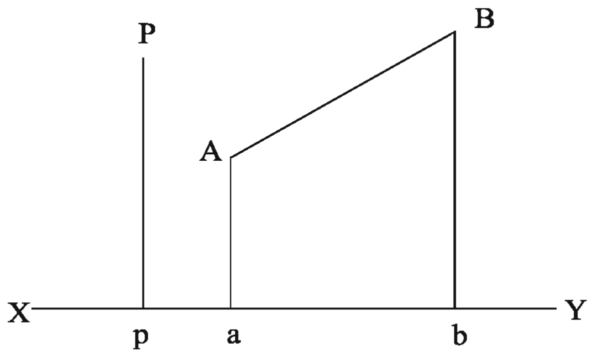
দ্বিতীয় অধ্যায়

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি

২.১। লম্ব অভিক্ষেপ

কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু বোঝায়।

মনে করি, XY একটি সরলরেখা। P বিন্দু থেকে XY রেখার উপর লম্বের পাদবিন্দু p; তাহলে XY রেখার উপর P বিন্দুর অভিক্ষেপ p বিন্দু।



আবার মনে করি, AB রেখাংশের প্রান্তবিন্দু A ও B থেকে XY সরলরেখার ওপর লম্ব যথাক্রমে Aa এবং Bb। এই লম্বদ্বয় দ্বারা XY রেখার ওপর ab রেখাংশই, XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

লম্ব অঙ্কন করে অভিক্ষেপ নির্ণীত হয় বলে ab কে XY এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection) বলা হয়।

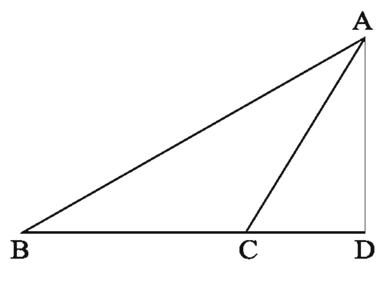
দ্রষ্টব্য : AB সরলরেখা XY রেখাংশের উপর লম্ব হলে ab এর দৈর্ঘ্য শূন্য হবে।

২.২। কতিপয় উপপাদ্য

উপপাদ্য - ২.১

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন : ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণের বিপরীত বাহু AB, স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC, BC। মনে করি, BC রেখার ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD।



প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\,CD.$

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle D$ এক সমকোণ।

$$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BD^2 = AD^2 + (BC+CD)^2$$

$$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.\,CD$$

$$= AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2BC.\ CD$$

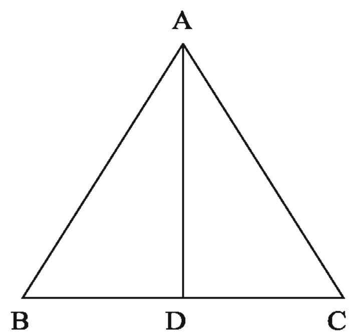
আবার ΔACD এর $\angle D$ এক সমকোণ হওয়ায়

$$AD^2 + CD^2 = AC^2$$

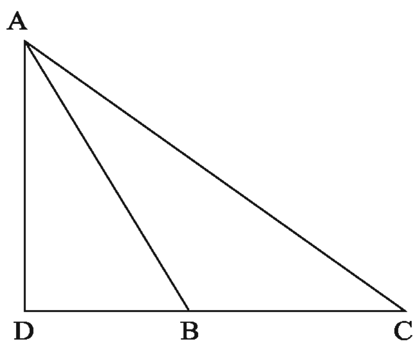
$$\therefore\ AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.\ CD.$$

উপপাদ্য - ২.২

যেকোনো ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।



চিত্র-১



চিত্র - ২

বিশেষ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB, অপর বাহুদ্বয় AC ও BC। মনে করি, BC বাহুর ওপর AD লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। সুতরাং BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD (উভয় চিত্র)।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC.CD$.

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ এক সমকোণ। $\therefore\ AB^2 = AD^2 + BD^2$.

কিন্তু $BD = BC - DC$ (চিত্র–১) অথবা $DC - BC$ (চিত্র–২)

$\therefore\ BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC.DC$

$\therefore\ AB^2 = AD^2 + BC^2 + DC^2 - 2BC.\ DC = AD^2 + DC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

আবার ΔADC এর $\angle D$ সমকোণ হওয়ায়, $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$\therefore\ AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD$

একই পদ্ধতিতে C বিন্দু থেকে AB এর উপর লম্ব অঙ্কন করে অনুরূপ সূত্র প্রমাণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য ১। সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বিধায় তাদের একটির উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য, সুতরাং $BC.\ CD = 0$

দ্রষ্টব্য ২। প্রকৃতপক্ষে উপপাদ্য ২.১ এবং ২.২ কে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি মনে করা যায়। তাই উক্ত তিনটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত অনুসারে নিম্নলিখিত তথ্যগুলো প্রমাণিত হয়েছে। কোনো ABC ত্রিভুজের

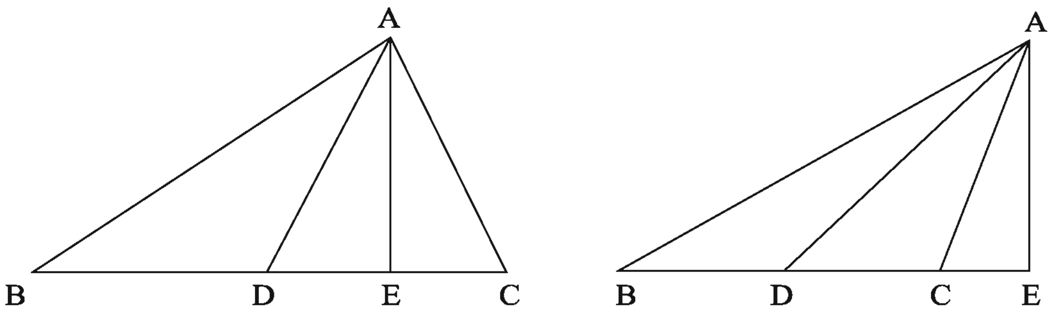
(ক) $\angle C$ স্থূলকোণ হলে, $AB^2 > BC^2 + CA^2$

(খ) $\angle C$ সমকোণ হলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$

(গ) $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে, $AB^2 < BC^2 + CA^2$

উপপাদ্য-২.৩

ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের ওপর বর্গক্ষেত্র এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার ওপর বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ (এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য)।



বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.

অঙ্কন : BC এর বা BC এর বর্ধিতাংশের ওপর AE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ : ΔABD এর $\angle ADB$ একটি স্থুলকোণ এবং BD রেখায় A এর লম্ব অভিক্ষেপ DE

$\therefore \ AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.\,DE$

আবার যেহেতু, ΔADC এর $\angle ADC$ একটি সূক্ষ্মকোণ DC রেখায় AD এর লম্ব অভিক্ষেপ DE

$\therefore \ AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.\,DE$ (উপঃ ২.২)

$\therefore \ AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.\,DE - 2CD.DE$

$= 2AD^2 + 2BD^2$ [কারণ, BD = CD]

$= 2(AD^2 + BD^2)$.

দ্রষ্টব্য ১। ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c এবং উহাদের ওপর অঙ্কিত মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f হলে, উপরোক্ত উপপাদ্য থেকে পাই

$b^2 + c^2 = 2d^2 + 2\left(\frac{1}{2}a\right)^2$

$\therefore\ b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

$\therefore\ d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

অনুরূপে $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$ এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

সুতরাং কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য জানা থাকলে মধ্যমাত্রয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়।

আবার মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি $d^2 + e^2 + f^2$

$= \frac{1}{4}\{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) + 2(a^2 + b^2) - b^2 - c^2\}$

$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

$\therefore\ 4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

অর্থাৎ $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$

সুতরাং কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র তিনটির সমষ্টির তিনগুণ উহার মধ্যমাগুলোর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র তিনটির সমষ্টির চারগুণের সমান।

দ্রষ্টব্য ২। ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle C = 90^0$ হলে, $a^2 + b^2 = c^2$

$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$

কিন্তু দ্রষ্টব্য ১ থেকে

$\therefore\ 4(d^2 + e^2 + f^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$

$\therefore\ 4(d^2 + e^2 + f^2) = 3.2c^2$

$\therefore\ 2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABC এর জন্য 2 (মধ্যমাত্রয়ের বর্গের সমষ্টি) $= 3c^2$, যেখানে $\angle C = 90^0$। অর্থাৎ, সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির দ্বিগুণ উহার অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণের সমান।

অনুশীলনী -২

১। ΔABC এর $\angle B = 60^0$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC.$

২। ΔABC এর $\angle B = 120^0$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC.$

৩। ΔABC এর $\angle C = 90^0$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$.

৪। ΔABC এর AD, BC এর ওপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব হলে দেখাও যে, BC.CD = AC.CE.

[সংকেত : $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$, কারণ $\angle ADC = 90^0$

আবার $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$, কারণ $\angle BEC = 90^0$]

৫। ΔABC এর AB = AC এবং AC কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হল যেন AC = CD হয়। প্রমাণ কর যে, $BD^2 = 2BC^2 + AC^2$.

৬। ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে যেকোনো বিন্দু P হলে প্রমাণ কর যে, $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = AC^2 + 4PO^2$.

৭। ABC ত্রিভুজের BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে।

প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

[সংকেত : BP = PQ = QC; আবার ABQ ত্রিভুজের মধ্যমা AP

$AB^2 + AQ^2 = 2(BP^2 + AP^2) = 2PQ^2 + 2AP^2$.

আবার APC ত্রিভুজের মধ্যমা AQ হওয়ায় $AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AQ^2$]

৮। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু হলে দেখাও যে,

$AB^2 - AP^2 = BP.\ PC.$

[সংকেত : BC এর উপর AD লম্ব অঙ্কন কর। তাহলে $AB^2 = BD^2 + AD^2$ এবং

$AP^2 = PD^2 + AD^2$.

$\therefore AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD) = (CD + PD)\ BP = PC.\ BP.$]

৯। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC কে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $BE^2 - CE^2 = BC.DE.$

১০। কোনো ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,

$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2).$

[সংকেত : উপঃ ২.৩ এর দ্রষ্টব্য দেখ এবং প্রথমে প্রমাণ কর যে,

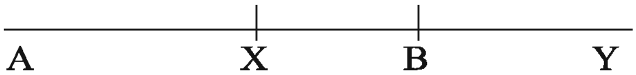
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$, যেখানে মধ্যমাত্রয় AD, BE এবং CF.

অতঃপর $AG = \frac{2}{3}AD$ বা, $4AD^2 = 9AG^2$ ইত্যাদি বসাও]

তৃতীয় অধ্যায়

অনুপাত ও সদৃশ ত্রিভুজ

৩.১। সরলরেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভক্তিকরণ



ওপরের চিত্রে, AB রেখাংশ X বিন্দুতে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত এবং একই অনুপাতে Y বিন্দুতে বহির্বিভক্ত হয়েছে। তাহলে, AX ঃ XB = m ঃ n এবং AY ঃ YB = m ঃ n

৩.২। অনুপাত ও সমানুপাত সংক্রান্ত কিছু ধর্ম

(i) a ঃ b = x ঃ y এবং c ঃ d = x ঃ y হলে, a ঃ b = c ঃ d হবে।

(ii) a ঃ x = b ঃ x হলে, a = b হবে।

(iii) a ঃ b = x ঃ y হলে, b ঃ a = y ঃ x হবে। (ব্যস্তকরণ)

(iv) a ঃ b = x ঃ y হলে, a ঃ x = b ঃ y হবে।

(v) a ঃ b = c ঃ d হলে, ad = bc হবে। (আড়গুণন)

(vi) a ঃ b = x ঃ y হলে, a + b ঃ b = x + y ঃ y (যোজন)

এবং a - b ঃ b = x -y ঃ y হবে। (বিয়োজন)

(vii) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$................. হলে, $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} =$ ....

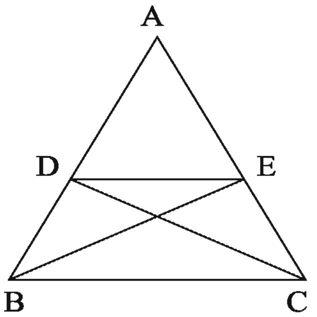
$= \frac{a + b + c + \ldots\ldots\ldots}{x + y + z + \ldots\ldots\ldots}$ হবে।

(viii) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ হবে । (যোজন ও বিয়োজন)

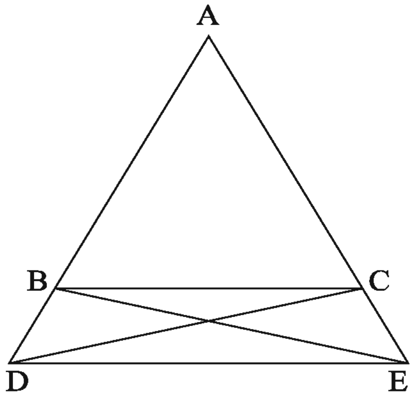
৩.৩। অনুপাত সম্পর্কিত কতিপয় উপপাদ্য

উপপাদ্য- ৩.১

ত্রিভুজের যেকোনো বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অপর বাহুদ্বয়কে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।



চিত্র–১



চিত্র–২

বিশেষ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল DE রেখাংশ AB ও AC বাহুদ্বয়কে (চিত্র-১) অথবা তাদের বর্ধিতাংশ দুইটিকে (চিত্র-২) যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AD ঃ DB = AE ঃ EC.

অঙ্কন : B ও E এবং C ও D যোগ করি।

প্রমাণ : ΔADE এবং ΔBDE একই উচ্চতাবিশিষ্ট

$$\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{AD}{DB}$$

আবার ΔADE এবং ΔDEC একই উচ্চতাবিশিষ্ট

$$\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC} = \frac{AE}{EC}$$

কিন্তু $\Delta BDE = \Delta DEC$ (একই ভূমি ও একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত)

$$\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta BDE} = \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$ অর্থাৎ AD ঃ DB = AE ঃ EC.

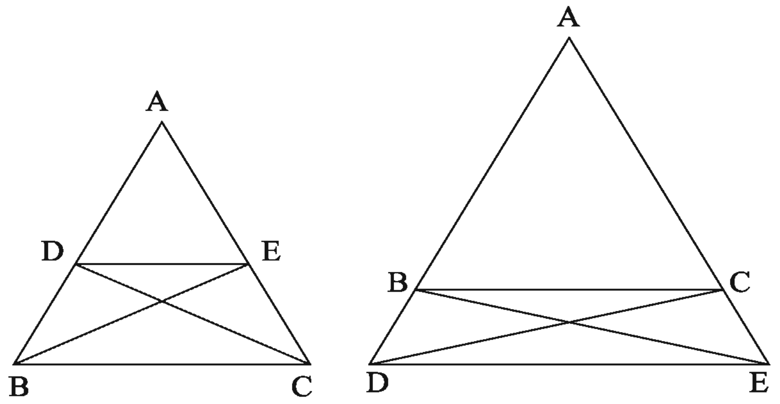
অনুসিদ্ধান্ত ১। ABC ত্রিভুজের BC বাহুর সমান্তরাল কোনো রেখা যদি AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে, তবে $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ এবং $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$ হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২। ত্রিভুজের কোনো বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অপর এক বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু এবং সমপাত বিন্দুতে মধ্যমাগুলি 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়।

উপপাদ্য- ৩.২

কোনো সরলরেখা একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে উক্ত সরলরেখা ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।



বিশেষ নির্বচন : DE রেখাংশ ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশ দুইটিকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে। অর্থাৎ AD : DB = AE : EC

প্রমাণ করতে হবে যে, DE এবং BC সমান্তরাল।

অঙ্কন : B, E এবং C, D যোগ করি।

প্রমাণ : $\frac{\Delta ADE}{\Delta DEB} = \frac{AD}{DB}$ (ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট)

এবং $\frac{\Delta ADE}{\Delta DEC} = \frac{AE}{EC}$ (ত্রিভুজ দুইটি একই উচ্চতাবিশিষ্ট)

কিন্তু $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ [স্বীকার]

$\therefore \frac{\Delta ADE}{\Delta DEB} = \frac{\Delta ADE}{\Delta DEC}$

$\therefore \Delta DEB = \Delta DEC$

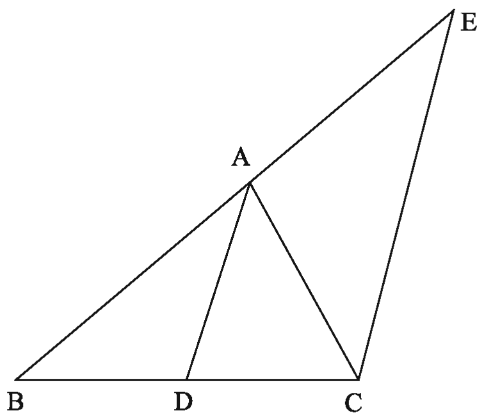
কিন্তু ΔDEB এবং ΔDEC একই ভূমি DE এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

সুতরাং তারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore$ BC ও DE সমান্তরাল।

উপপাদ্য- ৩.৩

ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AD রেখাংশ ΔABC এর অন্তঃস্থ $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে BC ভূমিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, BD ঃ DC = BA ঃ AC

অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি, যেন তা BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : যেহেতু DA ।। CE [অঙ্কন]

$\angle AEC = \angle BAD$ [অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACE = \angle CAD$ [একান্তর কোণ]

কিন্তু $\angle BAD = \angle CAD$ [স্বীকার]

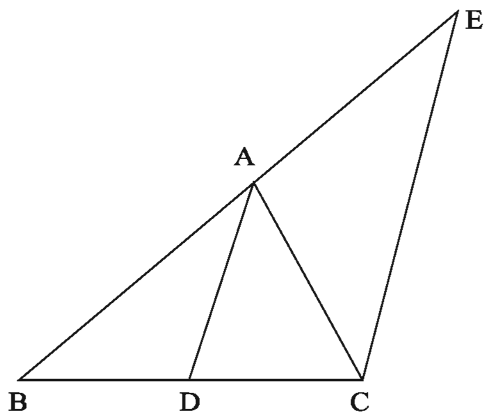
$\therefore \angle AEC = \angle ACE$ $\qquad \therefore AC = AE$

আবার, যেহেতু DA || CE $\qquad \therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BA}{AE}$

$$\therefore \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} \ (\because AE{=}AC)$$

উপপাদ্য-৩.৪

ত্রিভুজের যেকোনো বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, বিভাগ বিন্দু থেকে বিপরীত শীর্ষ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাংশ উক্ত শীর্ষকোণের সমদ্বিখণ্ডক হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের A বিন্দু থেকে অঙ্কিত AD সরলরেখাংশ BC বাহুকে D বিন্দুতে এরূপে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করেছে যে, BD ঃ DC = BA ঃ AC

প্রমাণ করতে হবে যে, AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ $\angle BAD = \angle CAD$.

অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে এরূপ CE রেখাংশ অঙ্কন করি যেন তা BA বাহুর বর্ধিতাংশ E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : ΔBCE এর CE || DA

$\therefore$ BA ঃ AE = BD ঃ DC

কিন্তু BD ঃ DC = BA ঃ AC (স্বীকার)

$\therefore$ BA ঃ AE = BA ঃ AC

$\therefore$ AE = AC

অতএব $\angle ACE = \angle AEC$

কিন্তু $\angle AEC$ = অনুরূপ $\angle BAD$

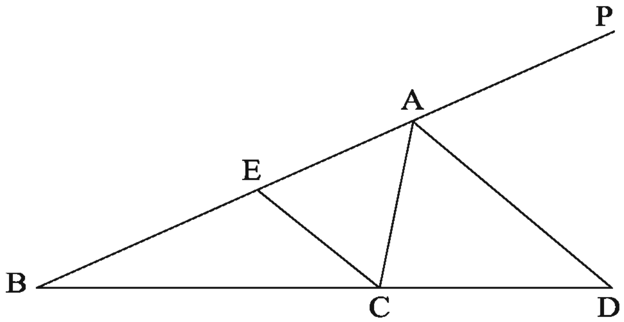
এবং $\angle ACE$ = একান্তর $\angle CAD$

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$

অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

উপপাদ্য- ৩.৫

ত্রিভুজের যেকোনো কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বিপরীত বাহুকে উক্ত কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।



বিশেষ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের BA বাহুকে P পর্যন্ত বর্ধিত করে বহিঃস্থ $\angle CAP$ উৎপন্ন করা হয়েছে। $\angle CAP$ এর সমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ $\angle BAC$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক AD রেখাংশ বর্ধিত BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, BD ঃ DC = AB ঃ AC

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়ে DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ অঙ্কন করি যেন তা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $EC || AD$

$\therefore$ $\angle CEA$ = অনুরূপ $\angle DAP$

এবং $\angle ECA$= একান্তর $\angle CAD$

কিন্তু $\angle CAD = \angle DAP$ [স্বীকার]

$\therefore \angle CEA = \angle ECA$

$\therefore AC = AE$

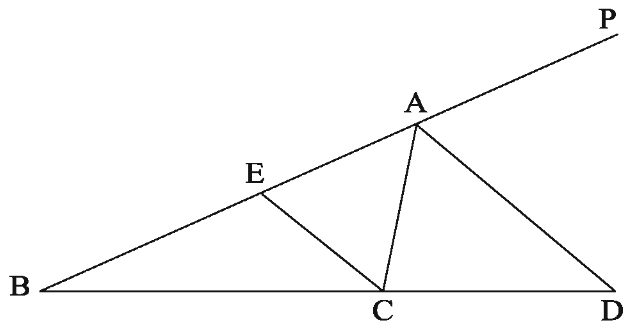
আবার যেহেতু $EC || AD$

$\therefore$ BD ঃ DC = BA ঃ AE

$\therefore$ BD ঃ DC = BA ঃ AC [$\therefore AE = AC$]

উপপাদ্য- ৩.৬

ত্রিভুজের যেকোনো বাহু অপর দুই বাহুর অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে, বিভাগ বিন্দু ও বিপরীত শীর্ষবিন্দুর সংযোজক রেখা উক্ত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের BC বাহু D বিন্দুতে এরূপে বহির্বিভক্ত হয়েছে যে,

BD ঃ DC = BA ঃ AC

A, D যোগ করি এবং BA বাহুকে P পর্যন্ত বর্ধিত করায় $\angle$CAP উৎপন্ন হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AD রেখাংশ $\angle$BAC এর বহির্দ্বিখণ্ডক; অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle$CAP এর সমদ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ $\angle CAD = \angle DAP$.

অঙ্কন : DA রেখাংশের সমান্তরাল করে C বিন্দু দিয়ে CE রেখাংশ অঙ্কন করি যেন তা BA কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : যেহেতু CE || DA

$\therefore$ BD ঃ DC = BA ঃ AE

কিন্তু BD ঃ DC = BA ঃ AC

$\therefore$ BA ঃ AE = BA ঃ AC

$\therefore$ AE = AC

অতএব $\angle ACE = \angle AEC$

আবার $\angle$AEC = অনুরূপ $\angle$PAD

এবং $\angle$ACE = একান্তর $\angle$CAD

$\therefore \angle PAD = \angle CAD$

অর্থাৎ AD রেখাংশ $\angle$CAP কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সুতরাং AD রেখাংশ $\angle$BAC এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

অনুশীলনী-৩.১

১। কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু দুইটিকে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করে। XY ভূমির সমান্তরাল হলে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

২। ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা AD এবং ADB ও ADC কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহুদ্বয়কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, EF || BC.

[সংকেত : ADB কোণের সমদ্বিখণ্ডক DE, $\therefore$ AE ঃ BE = AD ঃ BD

অনুরূপভাবে, AF ঃ CF = AD ঃ DC = AD ঃ BD কারণ, BD = CD

$\therefore \frac{AF}{BE} = \frac{AF}{CF}$ $\therefore$ EF || BC]

৩। প্রমাণ কর যে, কতকগুলো সমান্তরাল সরলরেখাকে দুইটি সরলরেখা ছেদ করলে অনুরূপ অংশগুলো সমানুপাতিক হবে।

৪। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় তাদের ছেদবিন্দুতে একই অনুপাতে বিভক্ত হয়।

৫। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

৬। ABC ত্রিভুজের AD ও BE মধ্যমাদ্বয় পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করেছে। G বিন্দুর মধ্য দিয়ে অঙ্কিত DE এর সমান্তরাল রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AC = 6EF.

[সংকেত : ΔADE এর GF || DE $\therefore$ AG ঃ GD = AF ঃ EF

অর্থাৎ $\frac{2GD}{GD} = \frac{AF}{EF}$ $\qquad \therefore \frac{AF+EF}{EF} = \frac{2+1}{1}$

অর্থাৎ AE = 3EF $\qquad \therefore$ AC = 2AE = 6EF]

৭। উপপাদ্য-৩.১ এর অনুসিদ্ধান্ত-৩ প্রমাণ কর।

৮। ΔABC এর BC বাহুস্থ যেকোনো বিন্দু X এবং AX রেখাস্থ O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ΔAOB ঃ ΔAOC = BX ঃ XC

৯। ΔABC এর ∠A এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, BD ঃ DC = BE ঃ CF

১০। ABCD সামান্তরিকের ∠BAD এর সমদ্বিখণ্ডক BD কে P বিন্দুতে এবং CD কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AP ঃ PQ = DC ঃ DA.

১১। কোনো বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ ABCD এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। AB = BC হলে, প্রমাণ কর যে, DA ঃ DC = AP ঃ PC

[সংকেত : ∠BAC = ∠ACB; আবার ∠BAC = ∠BDC একই চাপের উপরস্থ এবং

$\angle ACB = \angle ADB$, একই চাপের উপরস্থ। $\therefore \angle BDC = \angle ADB$

অর্থাৎ DP রেখাংশ $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক। $\therefore \dfrac{DA}{DC} = \dfrac{PA}{PC}$]

১২। ABC ও DEF সদৃশকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের উচ্চতা AM ও DN হলে প্রমাণ কর যে,

AM ঃ DN = AB ঃ DE.

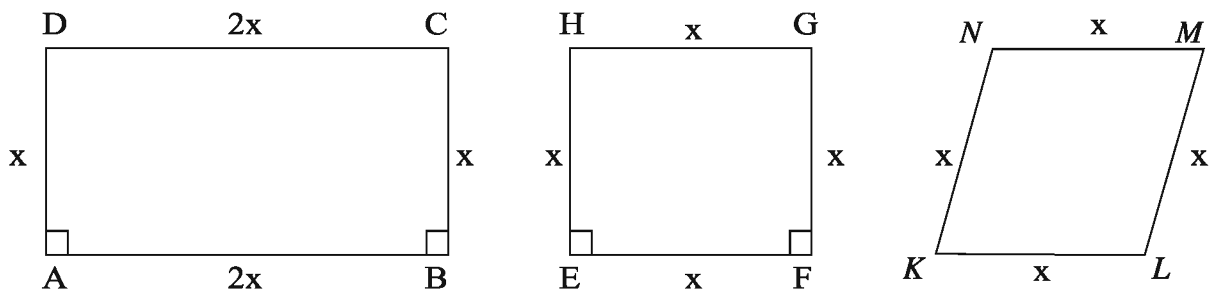
১৩। ABC এর AD মধ্যমার মধ্যবিন্দু E এবং বর্ধিত BE রেখাংশ AC কে F বিন্দুতে ছেদ করে ।

প্রমাণ কর যে, AC = 3AF এবং BF = 4EF.

৩.৪ । সদৃশতা (Similarity)

সংজ্ঞা ঃ সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বলা হয়।

সংজ্ঞা ঃ সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির (১) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং (২) অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাতগুলো সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) বহুভুজ বলা হয়।



উপরের চিত্রে আমরা লক্ষ করি যে, (i) ABCD আয়ত ও EFGH বর্গ সদৃশ নয় যদিও তারা সদৃশকোণী এবং (ii) EFGH বর্গ ও KLMN রম্বস সদৃশ নয় যদিও তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর যেকোনো ধারাবাহিক মিলকরণের ফলে অনুরূপ বাহু দুইটির অনুপাতগুলো সমান হয়। দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রে অবশ্য এরকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে যদি সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হয়, তবে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়।

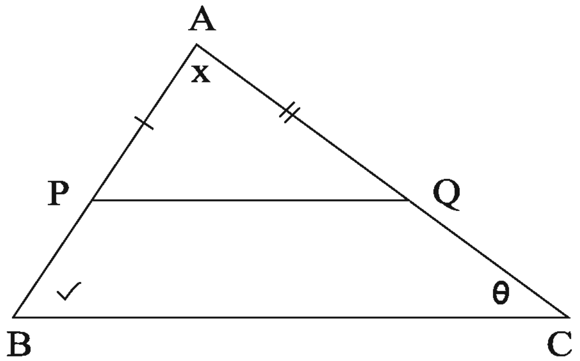
এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, (ক) দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে সমান কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ এবং অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু ধরা হয়।

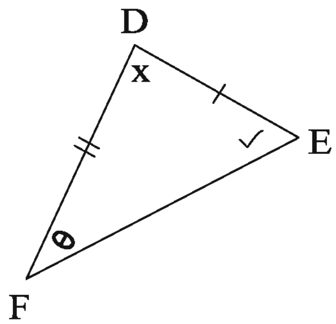
(খ) দুইটি ত্রিভুজের একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমানুপাতিক হলে, আনুপাতিক বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ ধরা হয়।

(গ) উভয় ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলোর শীর্ষবিন্দু মিল করে ত্রিভুজ দুইটি বর্ণনা করা হয়। যেমন, ΔABC ও ΔDEF এর অনুরূপ কোণগুলো হচ্ছে $\angle A$ ও $\angle D$, $\angle B$ ও $\angle E$, $\angle C$ ও $\angle F$ এবং অনুরূপ বাহুগুলো হচ্ছে AB বাহু ও DE বাহু, AC বাহু ও DF বাহু, BC বাহু ও EF বাহু।

উপপাদ্য - ৩.৭

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।





বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDEF এর কোনো একজোড়া অনুরূপ বাহু সমান হলে $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ হবে।

সুতরাং তখন $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$ হবে। ফলে $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ $(= 1)$ হবে।

অর্থাৎ, প্রমাণ সম্পূর্ণ হবে।

সুতরাং ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি।

AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন $AP = DE$ এবং $AQ = DF$ হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

এখন $\Delta APQ \cong \Delta DEF$, কারণ, $AP = DE$, $AQ = DF$ এবং $\angle A = \angle D$

সুতরাং $\angle APQ = \angle DEF = \angle ABC$ এবং $\angle AQP = \angle DFE = \angle ACB$.

অর্থাৎ PQ রেখাংশ ও BC বাহুকে AB বাহু ও AC রেখা ছেদ করায় অনুরূপ কোণযুগল সমান হয়েছে।

সুতরাং $PQ \| BC$ $\therefore \frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$ বা, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$.

একইভাবে BA বাহু ও BC বাহু থেকে যথাক্রমে ED রেখাংশ ও EF রেখাংশের সমান রেখাংশ কেটে নিয়ে দেখানো যায় যে,

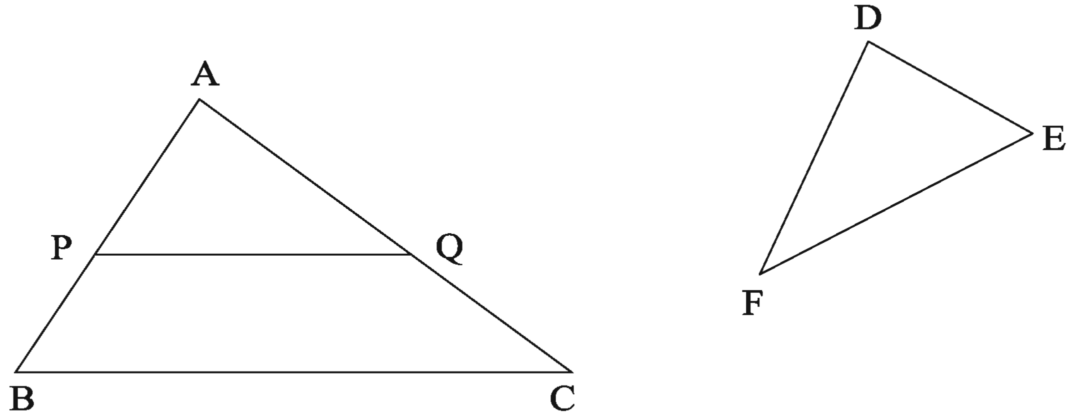
$\frac{BA}{ED} = \frac{BC}{DE}$ অর্থাৎ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ $\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$

অনুসিদ্ধান্ত : দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তারা সদৃশ হয়।

মন্তব্য : দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইটি কোণ অপরটির দুইটি কোণের সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং তার ফলে সদৃশ হয়। কেননা প্রত্যেকটি ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

উপপাদ্য - ৩.৮

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC ও ΔDEF এর $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}.$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$.

প্রমাণ : ΔABC ও ΔDEF এর কোনো একজোড়া অনুরূপ বাহু সমান হলে প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগলই সমান হবে এবং ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে। সুতরাং তখন অনুরূপ কোণগুলো সমান হবে। অর্থাৎ, প্রমাণ সম্পূর্ণ হবে। সুতরাং ΔABC ও ΔDEF এর প্রত্যেক অনুরূপ বাহুযুগল অসমান বিবেচনা করি।

AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC রশ্মিতে Q বিন্দু নিই যেন AP = DE এবং AQ = DF হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

এখন, যেহেতু $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ সুতরাং $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}.$

সুতরাং $PQ \parallel BC$

$\therefore \angle ABC = \angle APQ$ [AB ছেদক রেখা দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

এবং $\angle ACB = \angle AQP$ [AC ছেদক রেখা দ্বারা উৎপন্ন অনুরূপ কোণ]

ΔABC ও ΔAPQ সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PQ}$ বা, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{PQ}.$

$\therefore \frac{BC}{EF} = \frac{BC}{PQ}$ [কল্পনানুসারে $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$]

$\therefore$ EF = PQ

সুতরাং $\Delta APQ \cong \Delta DEF$ [একটির তিন বাহু অপরটির তিন বাহুর সমান বলে]

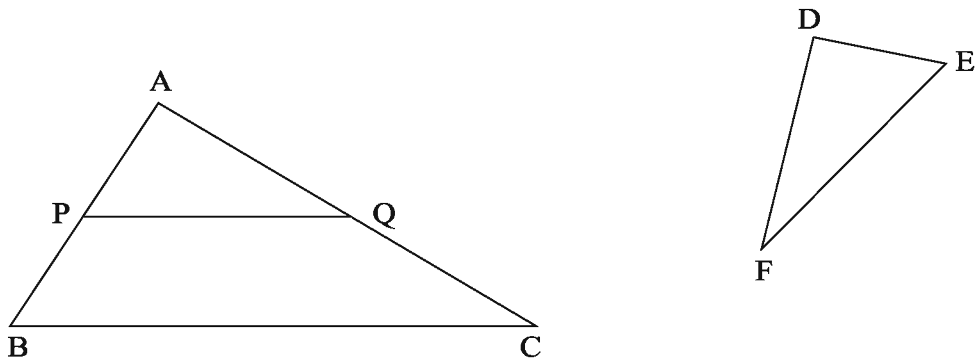
$\therefore \angle PAQ = \angle EDF, \angle APQ = \angle DEF, \angle AQP = \angle DFE$

অর্থাৎ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

[$\because$ $\angle APQ = \angle ABC$, এবং $\angle AQP = \angle ACB$]

উপপাদ্য- ৩.৯

দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান হলে এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এবং ΔDEF এমন যে,

$\angle A = \angle D$ এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔABC এবং ΔDEF সদৃশ।

প্রমাণ : যদি AB = DE হয়, তবে AC = DF হবে। (কারণ, কল্পনানুসারে, $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$)। ফলে, ΔABC এর দুই বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ ΔDEF এর দুই বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান হবে। সুতরাং তখন $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ হবে। অতএব, ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হবে।

এখন, মনে করি, $AB \neq DE$। তাহলে, $AC \neq DF$

AB বাহুতে P বিন্দু এবং AC বাহুতে Q বিন্দু নিই যেন AP = DE এবং AQ = DF হয়। P ও Q যোগ করে অঙ্কন সম্পন্ন করি।

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$, কারণ AP = DE, AQ = DF এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle A =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle D$।

$\angle A = \angle D, \angle APQ = \angle E, \angle AQP = \angle F.$

আবার, যেহেতু $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ সুতরাং $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$

$\therefore PQ \,||\, BC$

সুতরাং $\angle ABC = \angle APQ$ এবং $\angle ACB = \angle AQP$

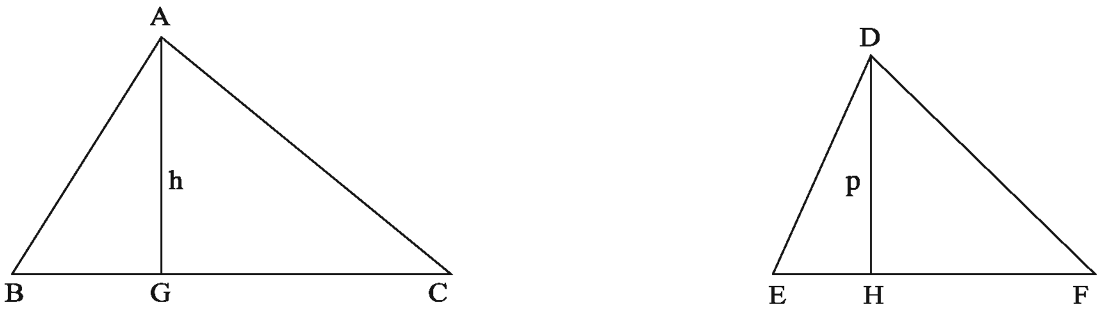
$\therefore\ \angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$

অর্থাৎ ΔABC ও ΔDEF সদৃশকোণী।

সুতরাং ΔABC ও ΔDEF সদৃশ।

উপপাদ্য - ৩.১০

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ এবং তাদের দুইটি অনুরূপ বাহু BC ও EF.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = BC^2 : EF^2$

অঙ্কন : BC ও EF এর ওপর যথাক্রমে AG ও DH লম্ব আঁকি এবং মনে করি, $AG = h$ এবং $DH = p$.

প্রমাণ : $\Delta ABC = \frac{1}{2}\ BC.h$ এবং $\Delta DEF = \frac{1}{2} EF.p$

$$\therefore\ \frac{ABC}{DEF} = \frac{\frac{1}{2}BC.h}{\frac{1}{2}EF.p} = \frac{h.BC}{p.EF}$$

কিন্তু ABG এবং DEH ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle B = \angle E, \angle AGB = \angle DHE$ (= এক সমকোণ)

$\therefore\ \Delta ABG$ ও ΔDEH সদৃশকোণী এবং তাই সদৃশ।

$\therefore\ \frac{h}{p} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ (কারণ ABC ও DEF সদৃশ)

$$\therefore\ \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{h.BC}{p.EF} = \frac{BC}{EF}.\ \frac{BC}{EF} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

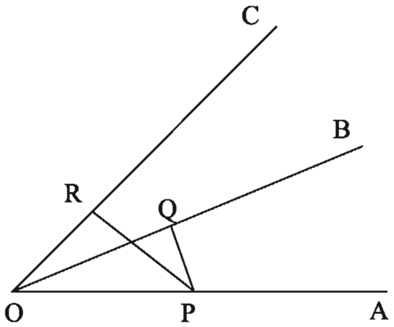
অনুশীলনী-৩.২

১। প্রমাণ কর যে, দুইটি ত্রিভুজের প্রত্যেকটি যদি অপর একটি ত্রিভুজের সদৃশ হয়, তবে তারা পরস্পর সদৃশ।

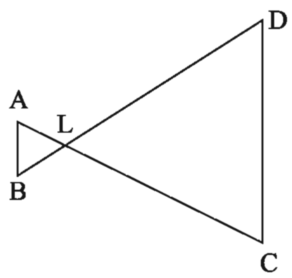
২। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির একটি সূক্ষ্মকোণের সমান হলে, ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়।

৩। প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ থেকে অতিভুজের উপর লম্ব আঁকলে যে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তারা পরস্পর সদৃশ এবং প্রত্যেকে মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

৪। পাশের চিত্রে, OA রশ্মিতে P বিন্দু থেকে OB ও OC রশ্মির ওপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব। দেখাও যে, $\frac{PQ}{PR}$ অনুপাতের মান OA রশ্মিতে P এর সকল অবস্থানের জন্য একই থাকে।



৫। পাশের চিত্রে, $\angle B = \angle D$ এবং CD = 4AB. প্রমাণ কর যে, BD = 5BL.

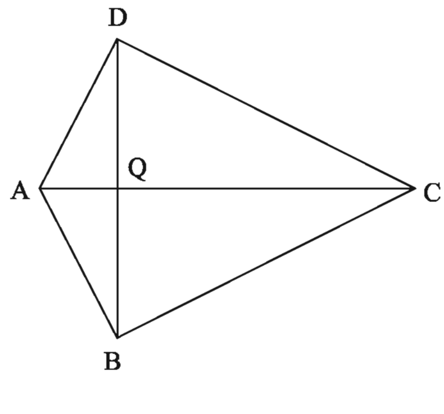


৬। ABCD সামান্তরিকের A শীর্ষ দিয়ে অঙ্কিত একটি রেখাংশ BC বাহুকে M বিন্দুতে এবং DC রেখাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, BM.DN একটি ধ্রুবক।

৭। পাশের চিত্রে, $DB \perp AC$ এবং

$$DQ = BQ = 2AQ = \frac{1}{2}QC.$$

প্রমাণ কর যে, $DA \perp DC$.

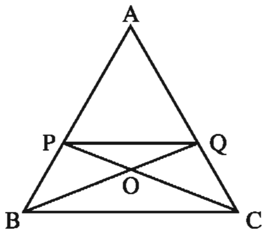


৮। ΔABC ও ΔDEF এর $\angle A = \angle D$
প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC : \Delta DEF = AB.AC : DE.DF$.

ত্রিভুজ সর্ম্পকিত

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

নিম্নের চিত্রের আলোকে (১ , ২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



চিত্রে PQ||BC

১। নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক ?

ক. AP ঃ AQ = PB ঃ QC

খ. AP ঃ AC = AQ ঃ QC

গ. AQ ঃ AB = BO ঃ OQ

ঘ. AB ঃ AP = PQ ঃ BC

২। PBCQ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?

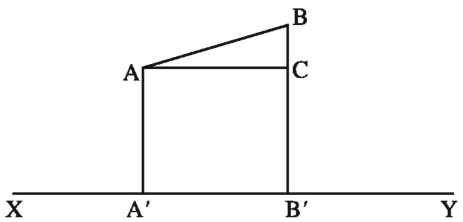
ক. PO ঃ OC = BO ঃ OQ

খ. PO ঃ OC = QO ঃ OB

গ. PO ঃ OB = OC ঃ OQ

ঘ. PO ঃ BO = QO ঃ OC

৩।



চিত্রে XY এর ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

ক. AC খ. A′B′

গ. BC ঘ. XY

৪। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে

i. $\angle C$ স্থূলকোণ হলে, $AB^2 > BC^2 + CA^2$

ii. $\angle C$ সমকোণ হলে, $AB^2 = BC^2 + CA^2$

iii. $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $AB^2 \neq BC^2 + CA^2$

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i
খ. ii
গ. i ও ii
ঘ. ii ও iii

৫। ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে

i. $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

ii. $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

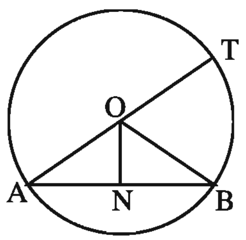
iii. Δ ক্ষেত্র ABC = Δ ক্ষেত্র DEF

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i ও ii
খ. i ও iii
গ. ii ও iii
ঘ. i, ii ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

১।

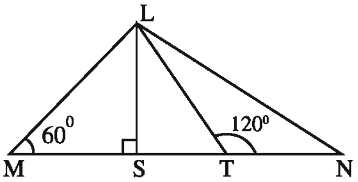


চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে, $ON \perp AB$

ক. AT = 10 সে.মি., AB = 8 সে.মি. হলে ON এর মান নির্ণয় কর।

খ. AB এর ওপর OB এর লম্ব অভিক্ষেপটি লিখ এবং এর সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2AB.BN$.

গ. AB এর ওপর N ভিন্ন অপর কোনো বিন্দু P হলে দেখাও যে, $OA^2 > AP.PB$.

২।


ক. চিত্রে LMT কোন ধরনের ত্রিভুজ এবং কেন?

খ. ΔLMN এ T, MN বাহুর মধ্যবিন্দু হলে, প্রমাণ কর যে, $LM^2+LN^2 = 2(LT^2+MT^2)$

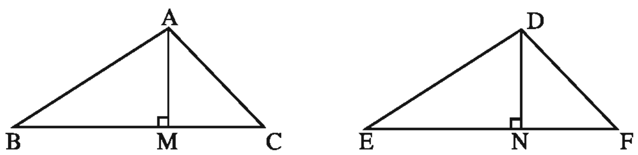
গ. ΔLMN এ MT এর সমান্তরাল PQ রেখাংশ LM ও LT যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে, প্রমাণ কর যে, $MQ^2 - TQ^2 = MT.PQ$

৩। ΔABC-এ $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। DA এর সমান্তরাল CE রেখাংশ বর্ধিত BA বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ক. তথ্য অনুসারে চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, BD ঃ DC = BA ঃ AC

গ. BC এর সমান্তরাল কোনো রেখাংশ AB ও AC কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, BD ঃ DC = BP ঃ CQ.

৪।


চিত্রে ABC এবং DEF দুইটি সদৃশ ত্রিভুজ।

ক. ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলোর নাম লিখ।

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$

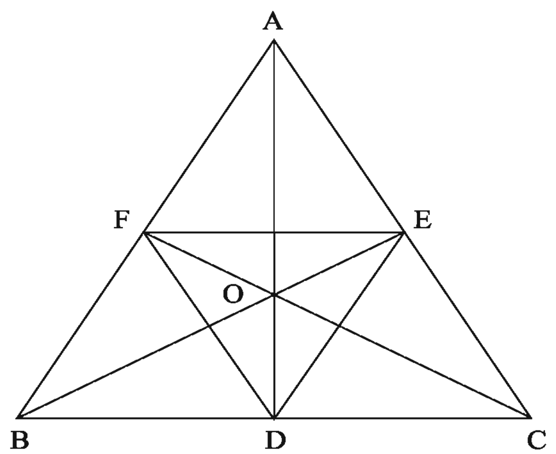
গ. যদি BC = 3 সে.মি., EF = 6 সে.মি., $\angle B = 60^0$, $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$ এবং ΔABC = 3 বর্গ সে.মি. হয়, তবে ΔDEF অঙ্কন কর এবং এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

চতুর্থ অধ্যায়

ত্রিভুজ ও বৃত্তবিষয়ক কতিপয় প্রতিজ্ঞা

উপপাদ্য - ৪.১

সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর ওপর লম্ব তার পাদত্রিভুজের কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর অঙ্কিত AD, BE, CF লম্বত্রয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

D ও E; E ও F এবং F, D যোগ করি। তাহলে DEF ত্রিভুজটিই ABC ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ।

প্রমাণ করতে হবে যে, AD, BE, CF যথাক্রমে $\angle FDE$, $\angle DEF$ এবং $\angle EFD$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ : OECD চতুর্ভুজে $\angle ODC$ + উহার বিপরীত $\angle OEC$ = ২ সমকোণ, কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, C, E বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই OE চাপের ওপর অবস্থিত $\angle ODE = \angle OCE$.

আবার, OFBD চতুর্ভুজে $\angle ODB$ + উহার বিপরীত $\angle OFB$ = ২ সমকোণ, কারণ প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ O, D, B, F বিন্দুগুলো সমবৃত্তস্থ।

$\therefore$ ঐ বৃত্তের একই OF চাপের ওপর অবস্থিত $\angle ODF = \angle OBF$

ΔABE ও ΔACF থেকে $\angle OBF$ ও $\angle OCE$ উভয়ই $\angle BAC$ এর পূরক কোণ।

$\therefore \angle OCE = \angle OBF$

$\therefore \angle ODE = \angle OCE = \angle OBF = \angle ODF$

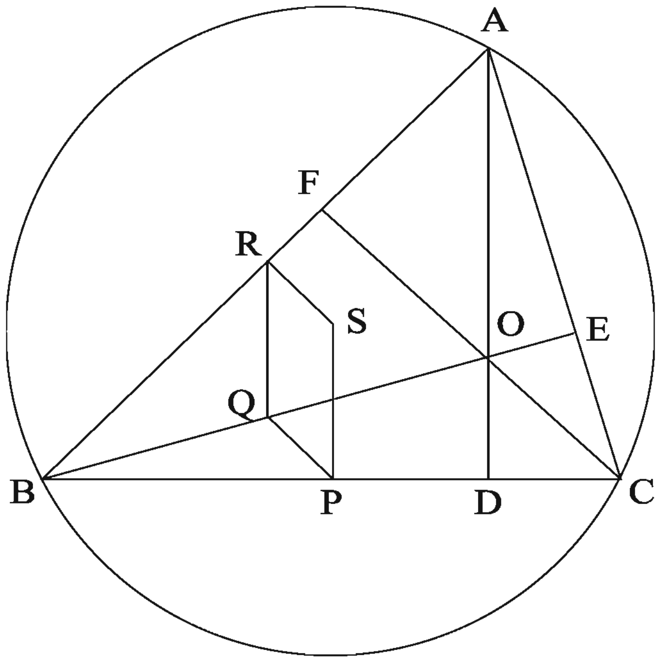
$\therefore$ AD সরলরেখাংশ $\angle FDE$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

দ্রষ্টব্য : উপরোক্ত উপপাদ্য থেকে প্রতীয়মান হয় যে, DEF পাদত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হয়। তাই O বিন্দুটি পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র। সুতরাং সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দুই পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

উপপাদ্য- ৪.২

ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে তার যেকোনো শীর্ষের দূরত্ব, ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং S থেকে BC বাহুর ওপর লম্ব দূরত্ব SP.

প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে A এর দূরত্ব, S থেকে BC এর দূরত্বের দ্বিগুণ, অর্থাৎ $OA = 2SP$.

অঙ্কন : OB এবং AB এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q এবং R নিই এবং P, Q; Q, R ও R, S যোগ করি।

প্রমাণ : ΔBOC এর BC ও BO বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q,

$\therefore$ $PQ || CO$ অর্থাৎ $PQ || CF$.

আবার, যেহেতু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S এবং AB বাহুর মধ্যবিন্দু R,

$\therefore$ SR রেখা AB এর ওপর লম্ব। $\therefore$ $SR || CF$ $\therefore PQ || SR$

ΔAOB এর AB ও BO বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও Q

$\therefore RQ || AO$ এবং $RQ = \frac{1}{2}AO$.

আবার, SP রেখাংশ BC এর ওপর লম্ব। $\therefore$ $SP || AD$ অর্থাৎ $SP || OA$

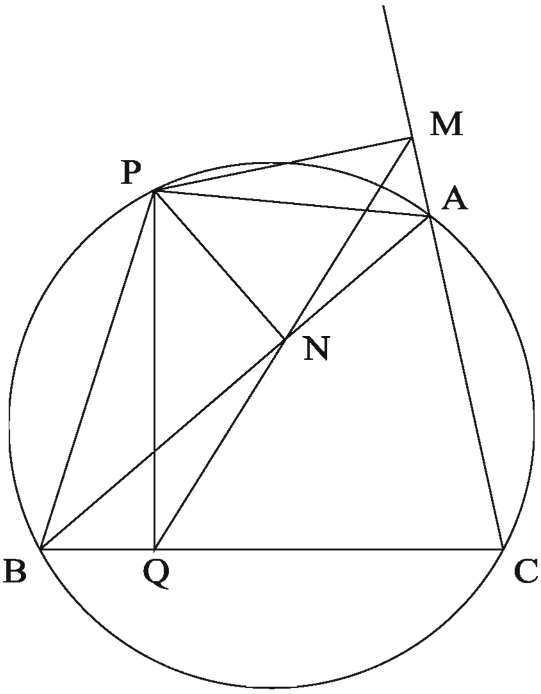
$\therefore$ $SP || OA || RQ$

$\therefore$ PQRS একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ SP = বিপরীত $RQ = \frac{1}{2}OA$. অর্থাৎ $OA = 2SP$.

উপপাদ্য - ৪.৩

ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ **যেকোনো** বিন্দু থেকে ঐ ত্রিভুজের বাহুরেখাত্রয়ের **ওপর** অঙ্কিত লম্ব তিনটির পাদবিন্দুগুলো সমরেখ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু থেকে BC ও AB বাহুদ্বয়ের ওপর যথাক্রমে PQ এবং PN লম্ব ও বর্ধিত CA এর ওপর PM লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, Q, M, N সমরেখ।

অঙ্কন : Q, N ও N, M যোগ করি এবং P, A ও P, B যোগ করি। এটাই প্রমাণ করলে যথেষ্ট হবে যে, QN, NM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle PQB = \angle PNB$ = এক সমকোণ।

$\therefore$ PNQB চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। আবার, $\angle PNA + \angle PMA$ = ২ সমকোণ (প্রত্যেকে সমকোণ)

$\therefore$ PNAM চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। $\therefore$ PM চাপের উপর $\angle PAM = \angle PNM$

আবার PNQB বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ থেকে,

$\angle PNQ = 180^0 - \angle PBQ = \angle PAC$ (কারণ P, A, C, B সমবৃত্ত)

$= 180^0 - \angle PAM = 180^0 - \angle PNM$

$\therefore \angle PNQ + \angle PNM = 180^0$

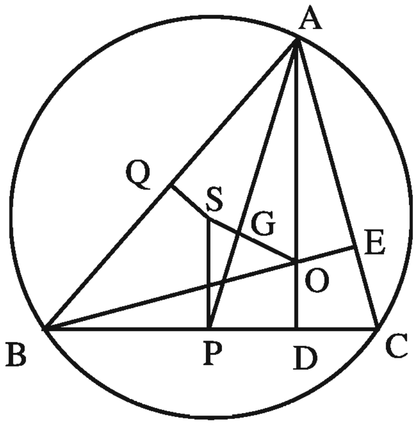
$\therefore$ QN ও NM একই সরলরেখায় অবস্থিত।

মন্তব্য : P বিন্দুর অবস্থানভেদে ত্রিভুজের CA বাহুরেখার স্থলে AB বা BC বাহুরেখা বর্ধিত করা প্রয়োজন হতে পারে এবং সেরূপ অবস্থায় পাদরেখারও অবস্থান পরিবর্তন হতে পারে।

দ্রষ্টব্য : ABC ত্রিভুজ সম্পর্কে QNM সরলরেখাকে P বিন্দুর পাদরেখা (Pedal line) বা সিমসন রেখা (Simson line) বা ওয়ালেস রেখা (Wallace line) বলা হয়।

উপপাদ্য- ৪.৪

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S। A, P যোগ করি, তাহলে AP, ΔABC এর একটি মধ্যমা, S, O যোগ করি, মনে করি, SO রেখাংশ AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে, তাহলে G বিন্দুটি ΔABC এর ভরকেন্দ্র প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

প্রমাণ : আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দূরত্বের দ্বিগুণ।

$\therefore$ ΔABC এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP.
$\therefore OA = 2SP$ ... ... (i)
এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর উপর লম্ব সেহেতু AD II SP
AD II SP এবং AP এদের ছেদক বলে, $\angle PAD = \angle SPA$; [একান্তর কোণ বলে]
অর্থাৎ $\angle OAG = \angle SPG$
এখন ΔAGO ও ΔPGS এর মধ্যে $\angle AGO = \angle PGS$; [বিপ্রতীপ কোণ বলে]
এবং $\angle OAG = \angle SPG$; [একান্তর কোণ বলে]
$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$
$\therefore$ ΔAGO ও ΔPGS সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{AG}{GP} = \frac{AO}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP}$; [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{1}$

$\therefore AG : GP = 2 : 1$
অর্থাৎ G বিন্দু AP মধ্যমাকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করেছে।
$\therefore$ G বিন্দু ΔABC এর ভরকেন্দ্র। [প্রমাণিত]

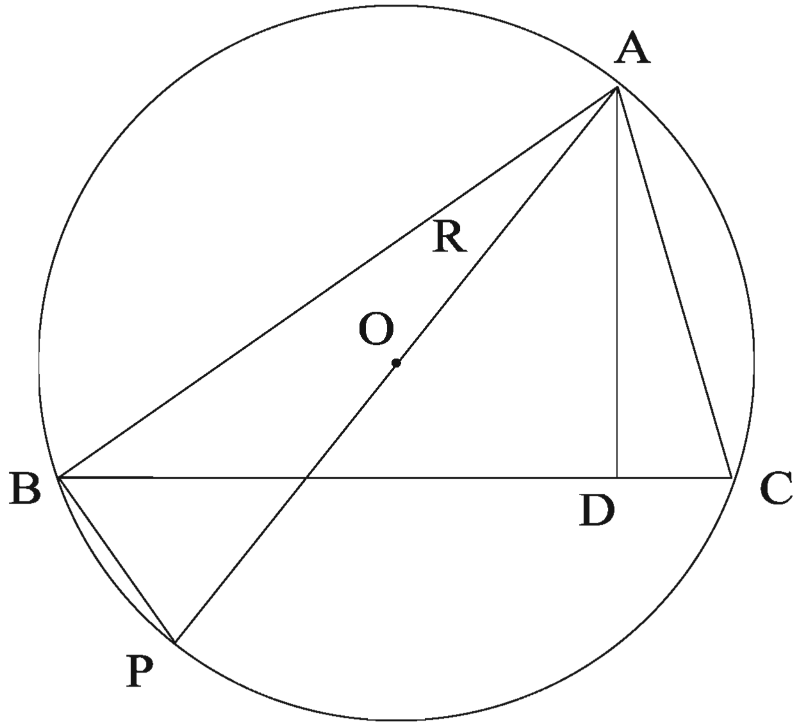
দ্রষ্টব্য ১। নববিন্দুবৃত্ত (Nine point circle) : কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলো মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বসমেত এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলা হয়।

২। ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন সসীম সরলরেখার মধ্যবিন্দুই তার নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র।

৩। নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।

উপপাদ্য - ৪.৫

কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান (ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য)।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ত্রিভুজে BC এর ওপর AD লম্ব এবং AP ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের একটি ব্যাস।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB.AC = AP.AD$

অঙ্কন : B, P যোগ করি।

প্রমাণ : ΔABP ও ΔADC এর মধ্যে

$\angle APB = \angle ACD$ (একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ)

$\angle ABP$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ = $\angle ADC$.

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAP$ = অবশিষ্ট $\angle CAD$

$\therefore$ ΔABP এবং ΔADC সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AP}{AC}$$

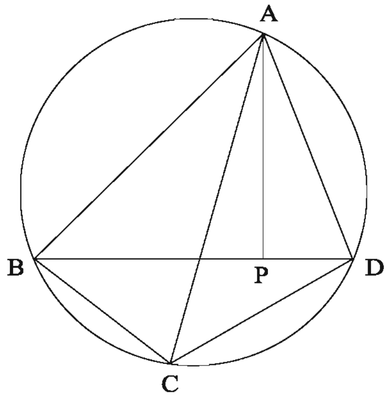
$\therefore$ $AB.AC = AP.AD$.

মন্তব্য : ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে, $R = \frac{1}{2} AP$.

সুতরাং উপরিউক্ত উপপাদ্য থেকে $AB.AC = 2R.AD$

উপপাদ্য - ৪.৬

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান (টলেমির উপপাদ্য)।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$.

অঙ্কন : $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ এর চেয়ে ছোট ধরে নিয়ে, A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ অঙ্কন করি যেন AP রেখা BD কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন]

প্রত্যেকের সাথে $\angle PAC$ যোগ করলে

$\angle BAC + \angle PAC = \angle PAD + \angle PAC$

অর্থাৎ $\angle BAP = \angle CAD$

এখন ΔABD এবং Δ ACD এর মধ্যে $\angle BAP = \angle CAD$

$\angle ABD = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle APB =$ অবশিষ্ট $\angle ADC$

$\therefore \Delta ABP$ এবং ΔACD সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$ অর্থাৎ $AC.BP = AB.CD$ ....(1)

আবার Δ ABC এবং Δ APD এর মধ্যে

$\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন]

$\angle ADP = \angle ACB$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC = \angle APD$

$\therefore \Delta ABC$ এবং ΔAPD সদৃশকোণী।

$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$ অর্থাৎ $AC.PD = AD.BC$ ....(2)

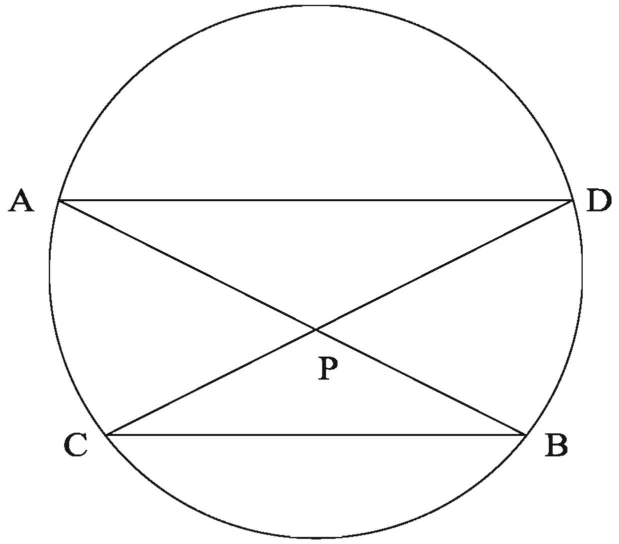
(1) ও (2) যোগ করে,

$AB.CD + BC.AD = AC.BP + AC.PD = AC(BP + PD) = AC.BD$

অর্থাৎ $AC.BD = AB.CD + BC.AD$.

উপপাদ্য - ৪.৭

কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ **কোনো** বিন্দুতে ছেদ করে, তবে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, একটি বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CD বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, AP.PB = CP.PD.

অঙ্কন : A, D এবং B, C যোগ করি।

প্রমাণ : PAD ও PBC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$\angle A = \angle C$ (একই চাপ BD এর উপর অবস্থিত কোণ)

$\angle D = \angle B$ (একই চাপ AC এর উপর অবস্থিত কোণ)

এবং $\angle APD$ = বিপ্রতীপ $\angle BPC$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$$\therefore \frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB}$$

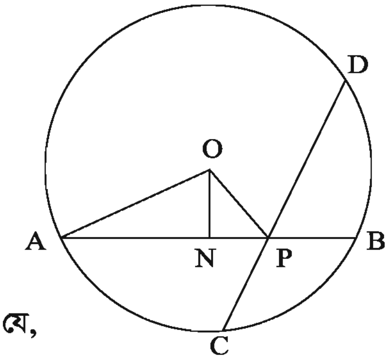
$\therefore$ AP.PB = CP.PD.

বিকল্প :

বিশেষ নির্বচন : একটি বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ঐ বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CB বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AP.PB = CP.PD

অঙ্কন : বৃত্তের কেন্দ্র থেকে AB এর উপর ON লম্ব অঙ্কন করি। O, A এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু AB এর উপর ON লম্ব, $\therefore$ AN = NB



$\therefore$ AP.PB = (AN +NP) (NB - NP)

= (AN +NP) (AN - NP) [$\therefore$ AN = NB]

$= AN^2 - NP^2$

$= AN^2 + ON^2 - ON^2 - NP^2$

$= (AN^2 + ON^2) - (NP^2 + ON^2)$

$= OA^2 - OP^2 = r^2 - OP^2$ [r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ]।

অনুরূপভাবে, O থেকে CD এর ওপর লম্ব এঁকে প্রমাণ করা যায় যে,

$CP.PD = r^2 - OP^2$

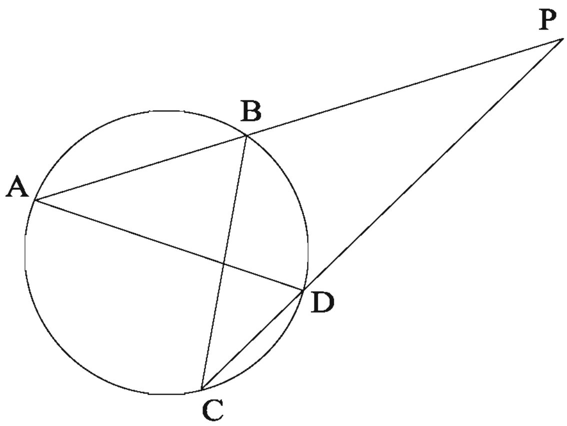
$\therefore$ AP.PB = CP.PD.

উপপাদ্য - ৪.৮

কোনো বৃত্তের দুইটি বর্ধিত জ্যা যদি বৃত্তের বহিঃস্থ **কোনো** বিন্দুতে ছেদ করে, তবে একটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র অপরটির অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

বিশেষ নির্বচন : একটি বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও CD কে বর্ধিত করায় তারা বৃত্তের বহিঃস্থ P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AP.PB = CP.PD.

অঙ্কন : A, D এবং B, C যোগ করি।



প্রমাণ : PAD ও PBC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle A = \angle C$ (একই চাপ BD-এর উপর অবস্থিত কোণ)

$\angle P$ সাধারণ।

এবং অবশিষ্ট $\angle PBC$ = অবশিষ্ট $\angle PDA$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore$ উহাদের অনুরূপ বাহুগুলি সমানুপাতিক

অর্থাৎ $\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB}$

$\therefore$ AP.PB = CP.PD.

বিকল্প :

বিশেষ নির্বচন : O একটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD ঐ বৃত্তের দুটি জ্যা, যারা বৃত্তের বাইরে একটি বিন্দু P-তে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AP.PB = CP.PD

অঙ্কন : বৃত্তের কেন্দ্র O থেকে জ্যা AB এর উপর ON লম্ব টানি এবং O A, O P ও O C যোগ করি।

প্রমাণ : O বৃত্তের কেন্দ্র, AB একটি জ্যা ও $ON \perp AB$

$\therefore$ AN = BN .... (1)

এখন, যেহেতু $AP.PB = (AN + NP)\ (NP - BN)$

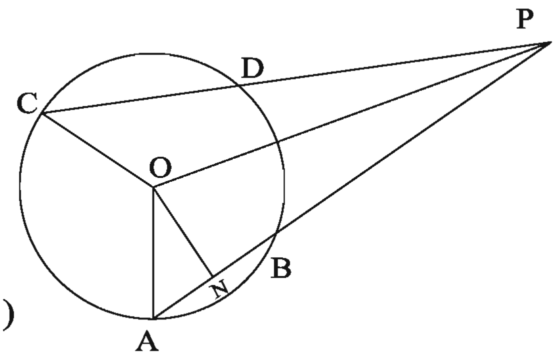
$= (NP + AN)\ (NP - AN)$ [(1) থেকে]।

$= NP^2 - AN^2$

$= NP^2 + ON^2 - ON^2 - AN^2$

$= (NP^2 + ON^2) - (AN^2 + ON^2)$

$= OP^2 - OA^2$.................... (2)



এবং অনুরূপে $CP.PD = OP^2 - OC^2$

$= OP^2 - OA^2$ ....(3)

$\because$ OA = OC, কারণ উহারা একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

$\therefore$ (2) ও (3) এর ডান পক্ষদ্বয় সমান।

$\therefore$ উহাদের বাম পক্ষদ্বয় সমান হবে।

অর্থাৎ AP.PB = CP.PD.

অনুশীলনী-৪

১। প্রমাণ কর যে, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের লম্ববিন্দু তার পাদত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র।

২। প্রমাণ কর যে, পাদত্রিভুজের কোনো দুই বাহু মূল ত্রিভুজের যে বাহুর সাথে মিলিত হয় তার সাথে উক্ত বাহুদ্বয় সমান কোণ উৎপন্ন করে।

[সংকেত : মনে কর, ABC ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ DEF এবং লম্ববিন্দু O,

তাহলে $\angle EDC = \angle ODE$ এর পূরক $= \angle OCE$ এর পূরক $= \angle BAC$.

কারণ OCE এবং ODE একই বৃত্তাংশস্থ কোণ। অনুরূপভাবে, $\angle FDB = \angle BAC$.

$\therefore \angle EDC = \angle FDB$ ইত্যাদি।]

৩। প্রমাণ কর যে, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ অঙ্কন করলে অপর যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় উহা ও মূল ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ।

৪। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, $PO \perp AB$. [সংকেত : যেহেতু P থেকে বাহুত্রয়ের ওপর লম্বের পাদবিন্দুগুলো সমরেখ, সুতরাং DE রেখাংশ P থেকে AB এর ওপর লম্বের পাদবিন্দুগামী। দুইটি সরলরেখা একটিমাত্র বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। $\therefore$ O বিন্দু P থেকে AB এর ওপর লম্বের পাদবিন্দু হবে।]

৫। ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের ওপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD.BD$.

৬। ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলির ওপর লম্ব AD.BE.CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF.

[সংকেত : ΔBOF এবং ΔCOE সদৃশ। $\therefore$ BO : CO = OF : OE.

$\therefore$ BO.OE = CO.OF ইত্যাদি]

৭। AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$

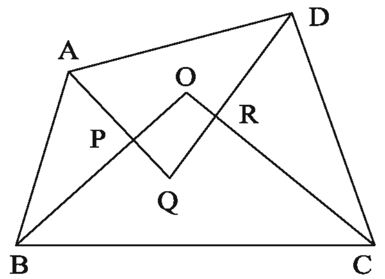
৮। কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে অঙ্কিত একটি সরলরেখাংশ বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তের একটি ব্যাস AB এর উপর PM লম্ব। প্রমাণ কর যে,
$PM^2 = PC.PD + AM.MB.$

৯। কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে যদি ঐ বৃত্তে একটি স্পর্শক PT ও একটি ছেদক PBA অঙ্কন করা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $PT^2 = PA.PB.$

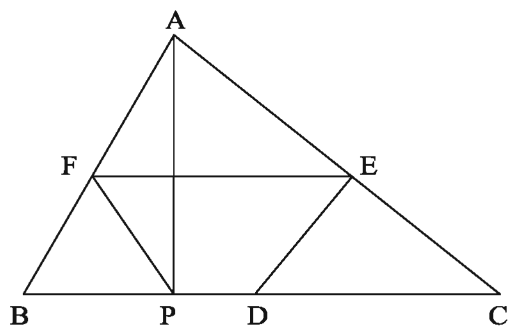
১০। প্রমাণ কর যে, দুইট পরস্পরছেদী বৃত্তের সাধারণ জ্যা–এর বর্ধিতাংশস্থিত কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।

১১। দুইটি বৃত্তের দুইটি জ্যা AB ও $A'B'$ বৃত্তে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। d ও d' যথাক্রমে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাস হলে প্রমাণ কর যে, $AB : A'B' = d : d'$

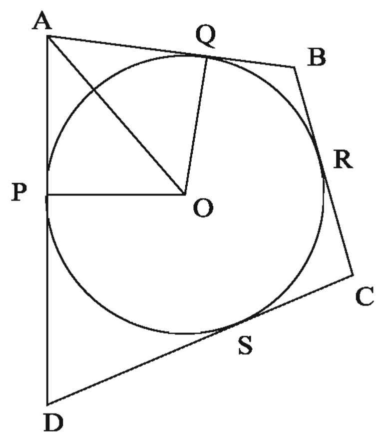
[সংকেত : কেন্দ্রস্থ কোণের সমদ্বিখণ্ডক OC রেখাংশ AB এর উপর লম্ব হবে।
ACO এবং $A'C'O'$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ প্রমাণ কর। পরে AOB এবং $A'O'B'$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ প্রমাণ কর।
তাহলে $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AO}{A'O'} = \frac{2AO}{2A'O'} = \frac{d}{d'}$



১২। প্রমাণ কর যে, ABCD চতুর্ভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক রেখাগুলোর ছেদনে উৎপন্ন OPQR চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হবে।

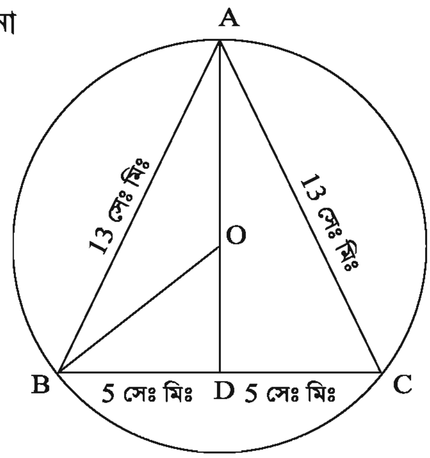


১৩। ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F এবং BC এর ওপর AP লম্ব। দেখাও যে, PDEF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।



১৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজ ABCD হলে প্রমাণ কর যে, AD + BC = AB + CD.

১৫। পরিলিখিত ABC ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য চিত্রে দেখানো হয়েছে। ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।



১৬। কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে. মি. হলে, ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৭। দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করেছে। APQ জ্যা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AP ও AQ এবং ব্যাসার্ধদ্বয় সমানুপাতিক।

১৮। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে $AB^2 = 2R.AD$.

১৯। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$.

২০। C কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি অপর দুই সমান্তরাল স্পর্শককে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $PQ.PR = CP^2$.

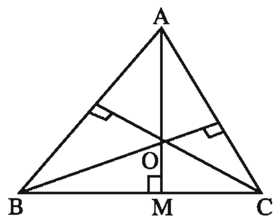
২১। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শকসমূহ তাদের কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশকে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে বিভক্ত করে।

২২। O কেন্দ্রিক কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে ঐ বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক। দেখাও যে, $\Delta PAB : \Delta AOB = PA^2 : OA^2$.

২৩। ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব।
দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

নিচের চিত্রের আলোকে ১নং ও ২নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১। O বিন্দুটিকে ΔABC এর কী বলে ?

ক. অন্তঃকেন্দ্র খ. ভরকেন্দ্র

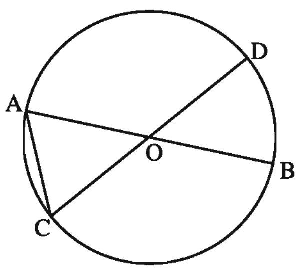
গ. লম্ববিন্দু ঘ. পরিকেন্দ্র

২। ΔABC এর ক্ষেত্রে গঠিত পাদত্রিভুজ কোনটি?

ক. ΔAEF খ. ΔBDF

গ. ΔDEF ঘ. ΔCDE

৩।

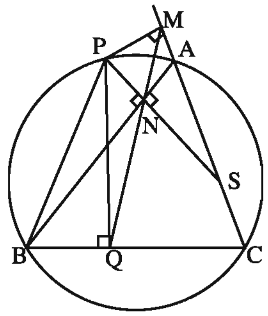


ওপরের চিত্রের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $AC.BD = AO.OB$ খ. $AO.AC = BD.DO$

গ. $AB.BO= CD.DO$ ঘ. $AO.BD = AC.OD$

চিত্রের আলোকে নিম্নের (৪-৬) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :



৪। চিত্রে পাদরেখা কোনটি?

ক. ANB খ. QNM
গ. BQC ঘ. CAM

৫। নিচের কোনটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ?

ক. PBQN খ. ACQN
গ. QNSC ঘ. PQCS

৬। চিত্রে কয়টি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ আছে?

ক. 1 টি খ. 2 টি
গ. 3 টি ঘ. 4 টি

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি বৃত্তের PQRS একটি অন্তলিখিত চতুর্ভুজ। PR এবং QR এর দুইটি কর্ণ এবং $\angle QPR = \angle SPT$ যেখানে PT রেখাংশ QS কে T বিন্দুতে ছেদ করে।

ক. বর্ণনামতে চিত্রটি অঙ্কন কর।
খ. দেখাও যে, $PR.QS - QR.PS = PQ.RS$
গ. বৃত্তের P বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁক যা বর্ধিত QS কে A বিন্দুতে ছেদ করে এবং প্রমাণ কর যে, $AP^2 = AQ.AS$

২। $\angle ABC$ এর পরিবৃত্তস্থ P বিন্দু হতে BC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর যথাক্রমে PQ ও PN এবং বর্ধিত CA এর উপর PM লম্ব।

ক. চিত্র এঁকে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের নাম লিখ।
খ. PQ ও BN-এর ছেদ বিন্দু O হলে, প্রমাণ কর যে, $PO.OQ = BO.ON$
গ. প্রমাণ কর যে, Q, N, M বিন্দু তিনটি সমরেখ।

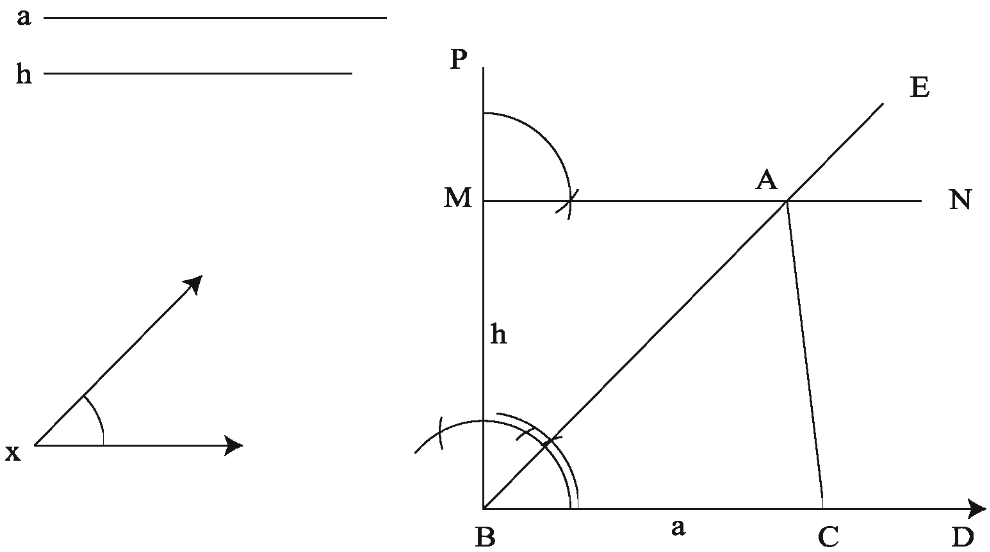
পঞ্চম অধ্যায়

বিবিধ জ্যামিতিক অঙ্কন

৫.১ । বিবিধ ত্রিভুজ অঙ্কন

সম্পাদ্য-১

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও উচ্চতা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, ভূমি a, উচ্চতা h এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BD থেকে $BC = a$ অংশ কেটে নিই। B বিন্দুতে BC এর উপর লম্ব BP অঙ্কন করি এবং BP থেকে $BM = h$ অংশ কেটে নিই। M বিন্দুতে BC এর সমান্তরাল MN রেখাংশ অঙ্কন করি। আবার B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBE$ অঙ্কন করি। BE রেখাংশ MN কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু $MN \| BC$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore$ ABC এর উচ্চতা $BM = h$

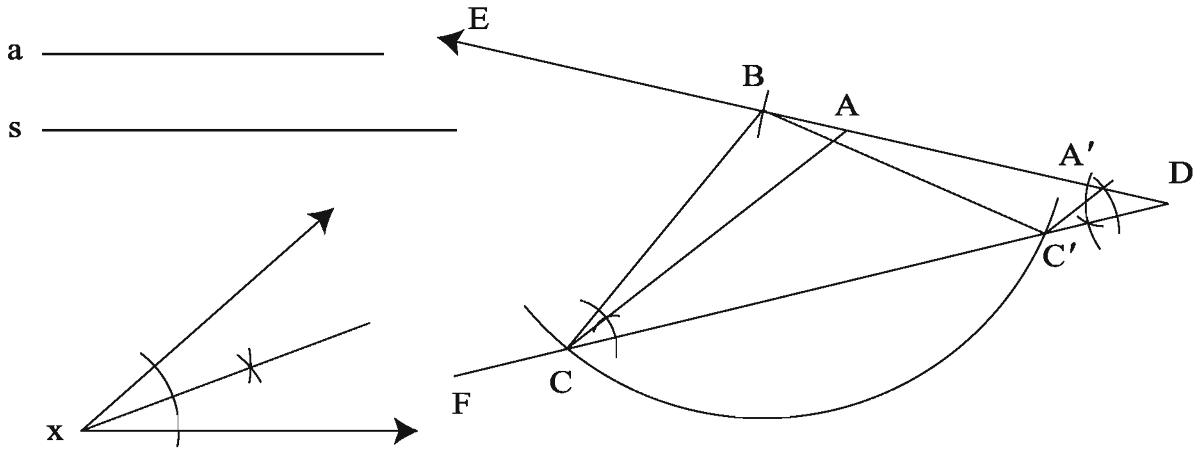
আবার $BC = a$ এবং $\angle ABC = \angle x$

$\therefore$ ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

বিশ্লেষণ : যেহেতু ভূমি ও ভূমি সংলগ্ন কোণ দেয়া আছে, সুতরাং একটি সরলরেখা থেকে ভূমির সমান অংশ কেটে নিয়ে তার একপ্রান্তে প্রদত্ত কোণের সমান কোণ আঁকতে হবে। অতঃপর ভূমির সঙ্গে নির্দিষ্ট কোণে আনত এমন রেখাস্থ বিন্দু নির্ণয় করতে হবে ভূমি থেকে যার উচ্চতা ত্রিভুজের উচ্চতার সমান হবে।

সম্পাদ্য-২

ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি s এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি DE থেকে DB = s অংশ কেটে নিই। DB রেখার D বিন্দুতে $\angle BDF = \frac{1}{2}\angle x$ অঙ্কন করি। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে ভূমি a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি যা DF কে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দুতে ∠BDF এর সমান ∠DCA এবং C′ বিন্দুতে ∠BDF এর সমান ∠DC′A′ অঙ্কন করি। CA ও C′A′ রেখাদ্বয় BD কে যথাক্রমে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ও A′BC′ ত্রিভুজদ্বয় উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle ACD = \angle ADC = \angle A'C'D = \frac{1}{2}\angle x$ (অঙ্কনানুসারে)

$\therefore\ \angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

$\angle BA'C' = \angle A'DC' + \angle A'C'D = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

এবং $AC = AD,\ A'C' = A'D$

ABC ত্রিভুজে $\angle BAC = \angle x$, $BC = a$ এবং $CA + AB = DA + AB = DB = s$

$\therefore\ \Delta ABC$ একটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

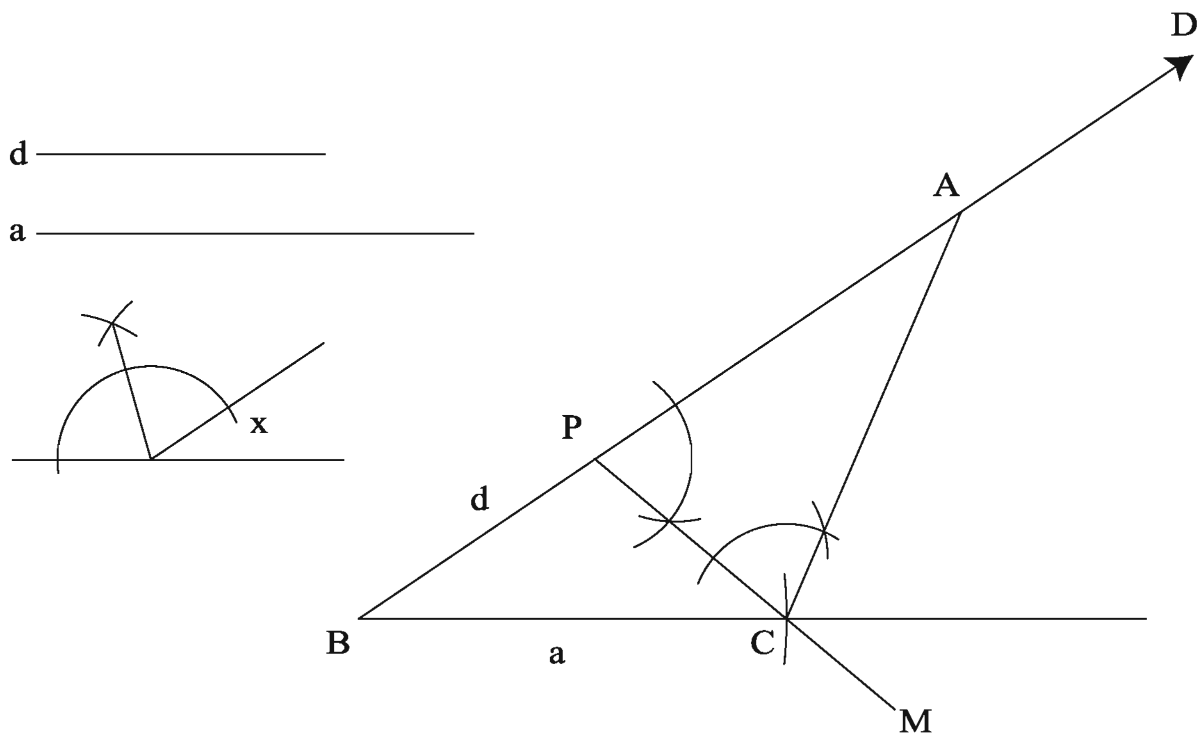
আবার A′BC′ ত্রিভুজ $\angle BA'C' = \angle x$, $BC' = a$

এবং $C'A' + A'B = DA' + A'B = DB = s$

$\Delta A'BC'$ অপর একটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য-৩

ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, ভূমি a, অপর দুই বাহুর অন্তর d এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BD থেকে BP = d অংশ কেটে নিই। P বিন্দুতে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের সমান $\angle DPM$ অঙ্কন করি। B বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ PM সরলরেখাকে C বিন্দুকে ছেদ করে। B,C যোগ করি। আবার C বিন্দুতে $\angle DPC = \angle PCA$ কোণ অঙ্কন করি যেন CA রেখাংশ BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : $\angle APC = \angle ACP \quad \therefore AP = AC$

$\therefore AB - AC = AB - AP = BP = d$

আবার $\angle APC = \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেক।

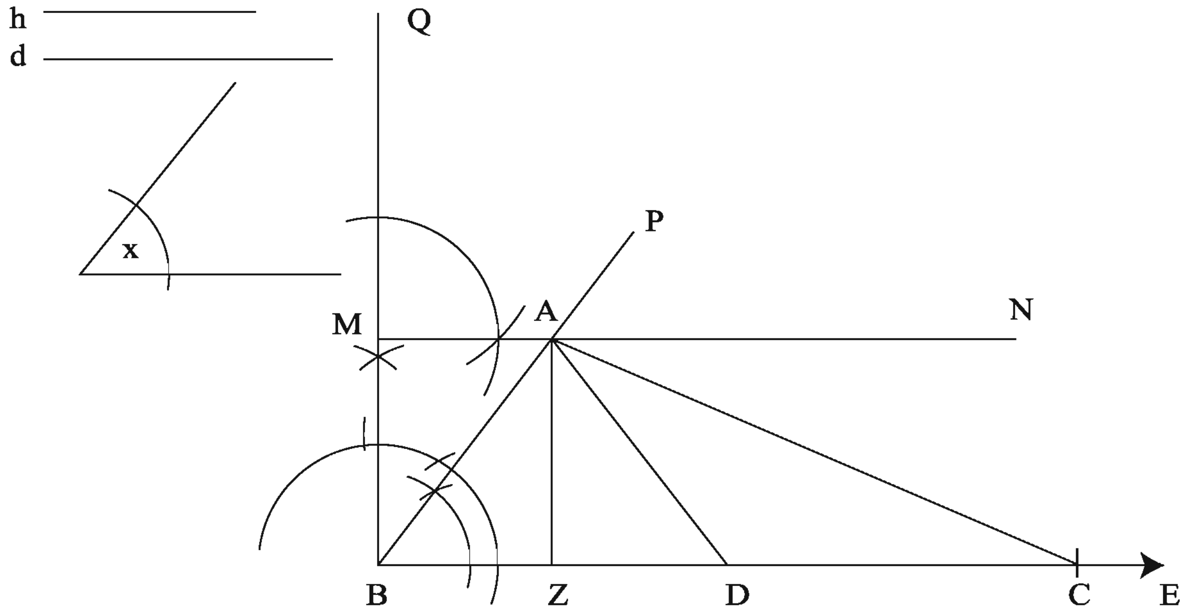
$\therefore \angle APC + \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক = বহিঃস্থ $\angle CAD = \angle CAB$ এর সম্পূরক।

$\therefore \angle A = \angle CAB = \angle x$

$\therefore$ ABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য - ৪

ত্রিভুজের উচ্চতা, ভূমির উপর মধ্যমা এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, ত্রিভুজের উচ্চতা h, ভূমির উপর মধ্যমা d এবং ভূমি সংলগ্ন একটি $\angle x$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো BE রশ্মির রেখার B বিন্দু $\angle x$ এর সমান করে $\angle EBP$ অঙ্কন করি। আবার B বিন্দুতে BE রেখার উপর BQ লম্ব অঙ্কন করি। BQ থেকে ত্রিভুজের উচ্চতা h এর সমান BM অংশ কেটে নিই। M বিন্দুতে BE এর সমান্তরাল করে MN রেখা অঙ্কন করি যা BP কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে মধ্যমা d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। ঐ বৃত্তচাপ BE কে D বিন্দুতে ছেদ করে। BE থেকে BD = DC অংশ কেটে নিই। A, C যোগ করি। তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : A, D যোগ করি এবং A থেকে BC এর উপর AZ লম্ব অঙ্কন করি।

এখানে, MN ও BE সমান্তরাল এবং MB ও AZ উভয়েই BE এর উপর লম্ব।

$\therefore$ MB = AZ = h = উচ্চতা

BD = DC $\therefore$ D বিন্দুই BC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ AD = d = ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা, অর্থাৎ BC ভূমি।

আবার $\angle ABC = \angle x$ = ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ।

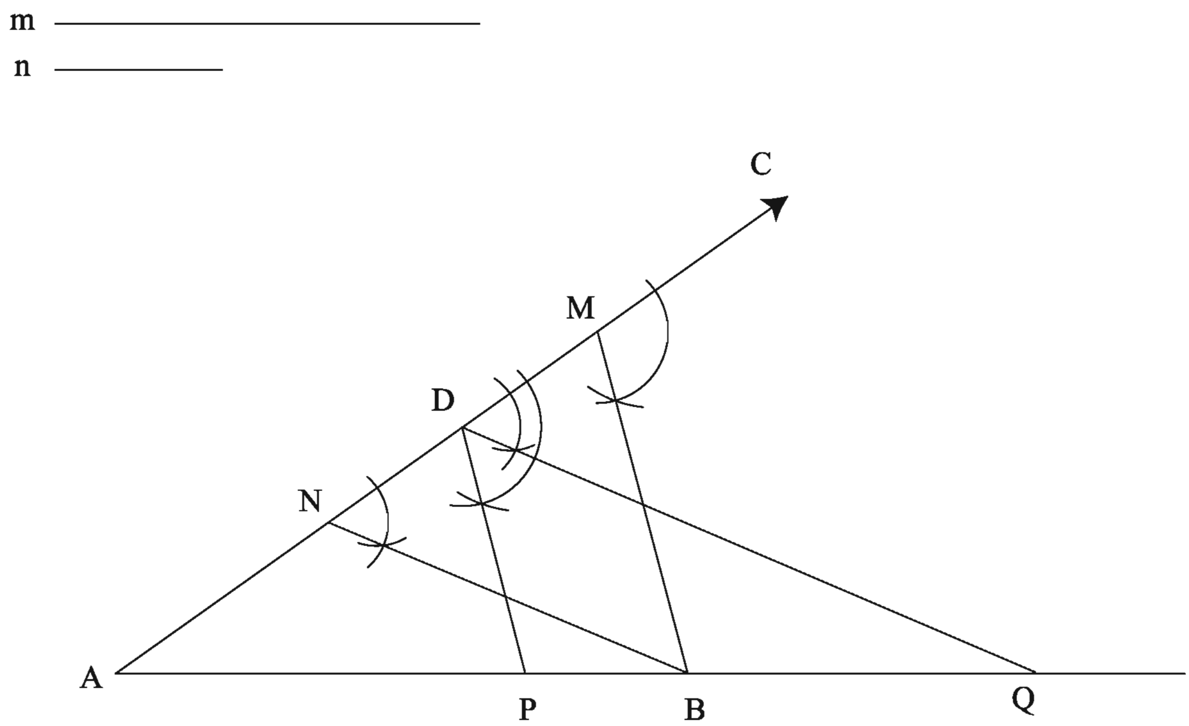
$\therefore$ ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য : $\angle x$ এর উপর নির্ভর করে অনেক ক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যেতে পারে।

৫.২। অনুপাত সংক্রান্ত অঙ্কন

সম্পাদ্য-৫

কোনো নির্দিষ্ট রেখাংশকে নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করতে হবে।



মনে করি, AB রেখাংশকে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করতে হবে। অবশ্যই $m > n$ হতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ ঃ A বিন্দুতে যেকোনো কোণ $\angle BAC$ অঙ্কন করি এবং AC রশ্মি থেকে $AD = m$ অংশ কেটে নিই। DC এবং DA থেকে $DM = DN = n$ অংশ কেটে নিই। M, B ও B, N যোগ করি। D বিন্দুতে MB এবং NB এর সমান্তরাল যথাক্রমে DP এবং DQ রেখাংশদ্বয় অঙ্কন করি যেন তারা যথাক্রমে AB কে P বিন্দুতে এবং বর্ধিত AB কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB রেখাংশ P ও Q বিন্দুতে m ঃ n অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত হল।

প্রমাণ ঃ যেহেতু PD রেখাংশ ABM ত্রিভুজের এক বাহু BM এর সমান্তরাল,

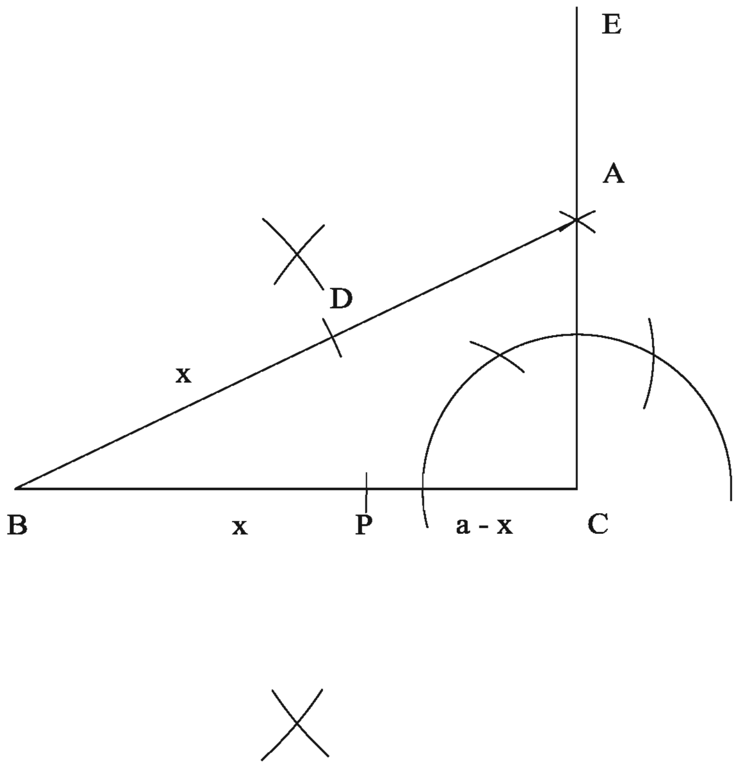
$\therefore$ AP ঃ PB = AD ঃ DM = m ঃ n

আবার যেহেতু QD রেখাংশ ABN ত্রিভুজের এক বাহু BN এর সমান্তরাল,

$\therefore$ AQ ঃ QB = AD ঃ DN = m ঃ n.

সম্পাদ্য-৬

কোনো নির্দিষ্ট রেখাংশকে এরূপভাবে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে যেন সমগ্র রেখাংশের ও একটি অংশের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অন্য অংশটির উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।



BC (= a) একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। একে P বিন্দুতে এমনভাবে অন্তর্বিভক্ত করতে হবে যেন $BC.CP = BP^2$ হয়।

অঙ্কনের বিবরণ : C বিন্দুতে BC এর উপর CE লম্ব অঙ্কন করি। CE থেকে $CA = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ অংশ কেটে নিই। A, B যোগ করি। AB থেকে $AD = \frac{a}{2}$ অংশ কেটে নিই।

মনে করি, BD = x এবং BC থেকে BP = x অংশ কেটে নিই।
তাহলে, BC রেখাংশ P বিন্দুতে নির্ণেয় অংশে অন্তর্বিভক্ত হল।
প্রমাণ : ABC সমকোণী ত্রিভুজে $BC^2 = AB^2 - AC^2$

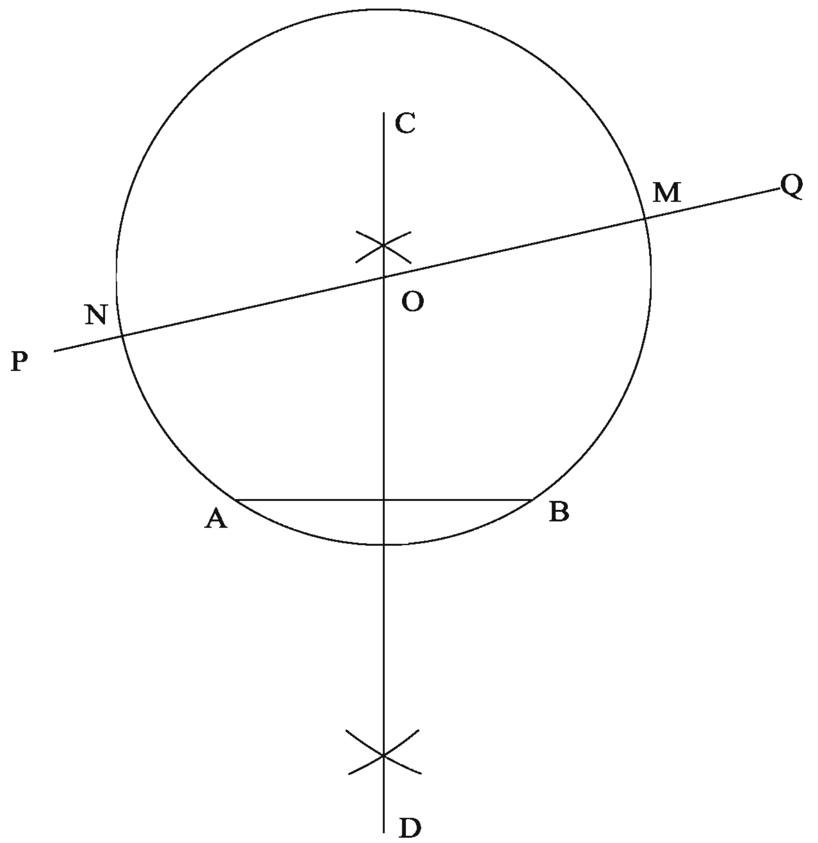
অর্থাৎ $a^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = x^2 + ax$

$\therefore\ x^2 = a^2 - ax = a(a-x)$ অর্থাৎ $BP^2 = BC.CP$.

৫.৩। বৃত্ত সংক্রান্ত অঙ্কন

সম্পাদ্য-৭

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত থাকে।



A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং PQ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র PQ সরলরেখার উপর অবস্থান করে।

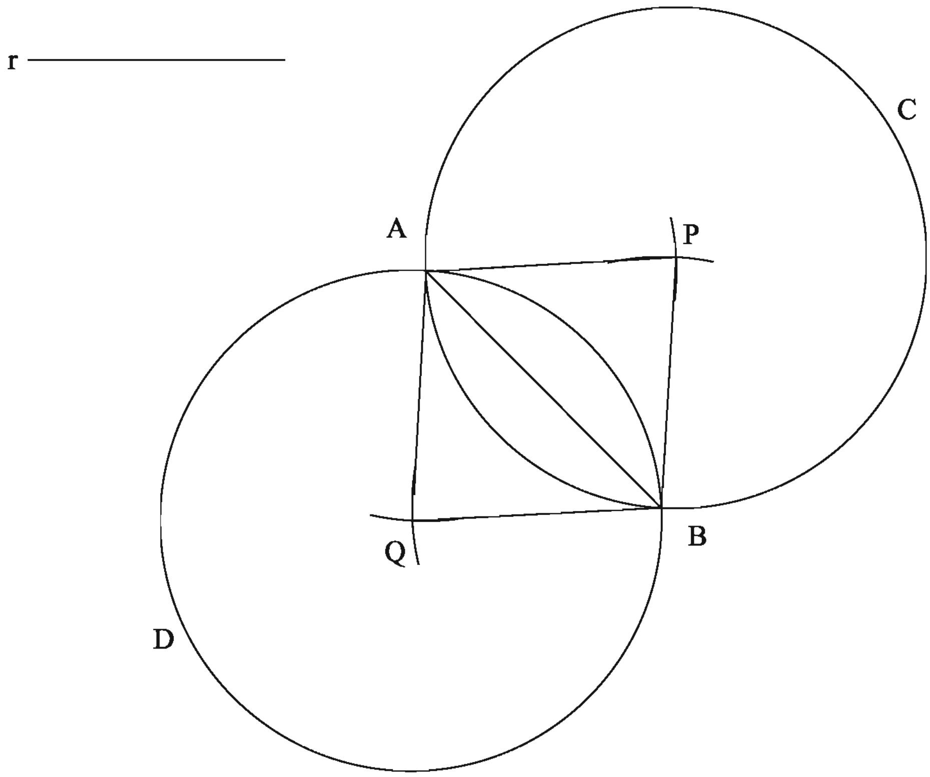
অঙ্কনের বিবরণ : A, B যোগ করে AB রেখাংশের সমদ্বিখণ্ডক CD অঙ্কন করি। মনে করি, CD রেখাংশ PQ রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABMN বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ : CD রেখা AB রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং CD রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী। অঙ্কনানুসারে, O বিন্দুটি CD ও PQ এর উপর অবস্থিত। আবার OA ও OB সমান বলে O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি A ও B বিন্দু দিয়ে যাবে এবং বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুটি PQ রেখার উপর অবস্থান করবে।

$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

সম্পাদ্য-৮

একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।



A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্য। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ব্যাসার্ধ r এর সমান হয়।

অঙ্কনের বিবরণ : A ও B যোগ করি এবং A ও B কে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর প্রত্যেক পাশে দুইটি করে বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। এক পাশের বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে এবং অপর পাশের বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। P কে কেন্দ্র করে PA এবং Q কে কেন্দ্র করে QA ব্যাসার্ধ নিয়ে যথাক্রমে অঙ্কিত ABC ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রত্যেকটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ : PA = PB = r,

∴ P কে কেন্দ্র করে PA বা PB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABC বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসার্ধ PA = r হয়।

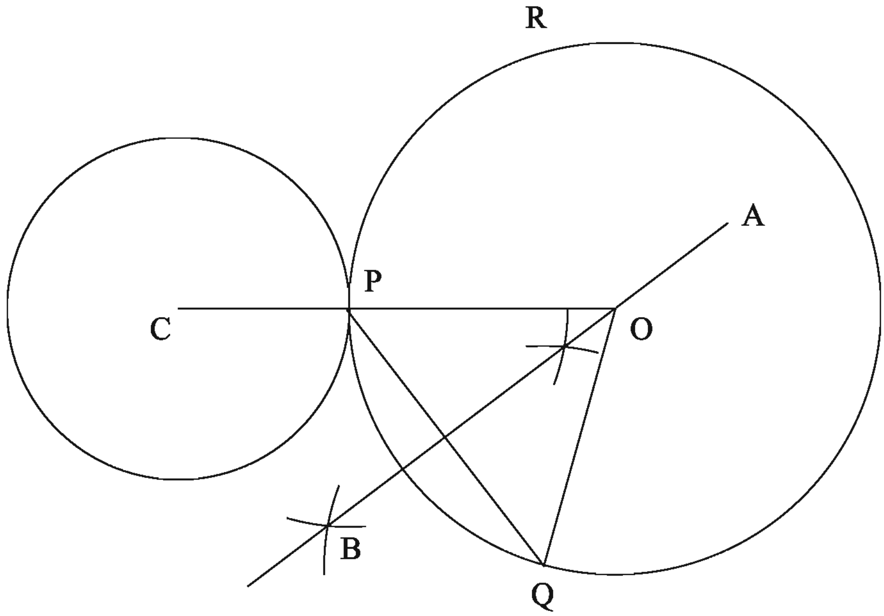
আবার QA = QB = r

Q কে কেন্দ্র করে QA বা QB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABD বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসার্ধ QA = r হয়।

∴ ABC ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রতিটিই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য-৯

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।



মনে করি, নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র C, P ঐ বৃত্তের ওপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং Q ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং Q বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনের বিবরণ : P, Q যোগ করি এবং PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক AB আঁকি। CP যোগ করি। বর্ধিত CP রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত PQR-ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : O, Q যোগ করি। AB রেখাংশ বা OB রেখাংশ PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ OP = OQ

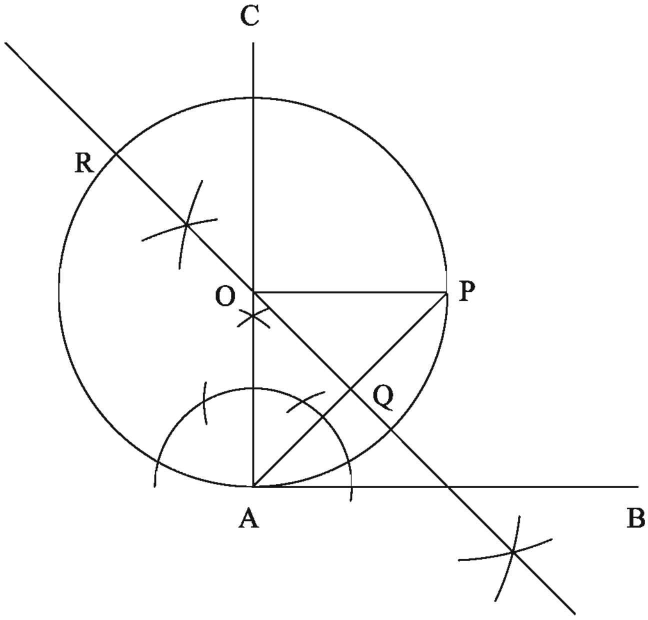
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা Q বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার P বিন্দুটি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখার উপর অবস্থিত এবং P বিন্দু উভয় বৃত্তের উপর অবস্থিত অর্থাৎ P বিন্দুতে বৃত্তদ্বয় মিলিত হয়েছে। সুতরাং বৃত্তদ্বয় P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য-১০

এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং ঐ রেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু দিয়ে যায়।



মনে করি, AB সরলরেখাস্থ A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB রেখার বহিঃস্থ P অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা AB কে A বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং P বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনের বিবরণ : AB এর উপর A বিন্দুতে AC লম্ব অঙ্কন করি। P, A যোগ করে তার লম্বদ্বিখণ্ডক QO অঙ্কন করি। মনে করি, QO এবং AC রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি QO রেখাকে R বিন্দুতে ছেদ করে। APR−ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : O, P যোগ করি। AP রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক OQ এর উপর O বিন্দুটি অবস্থিত। $\therefore$ OA = OP
$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত P বিন্দু দিয়ে যায়।
আবার OA ব্যাসার্ধ রেখার A প্রান্তবিন্দুতে AB এর উপর AO লম্ব।
$\therefore$ AB রেখাংশ বৃত্তটিকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে।
$\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

বিশ্লেষণ : যেহেতু বৃত্তটি নির্দিষ্ট রেখাকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, সুতরাং ঐ রেখাটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকের সঙ্গে সমকোণে থাকবে। সুতরাং নির্দিষ্ট রেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব আঁকতে হবে এবং এই লম্বই বৃত্তের একটি ব্যাস হবে। আবার ঐ রেখাস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু ও বহিঃস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু উভয়েই বৃত্তের পরিধির ওপরে থাকবে বিধায় এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্র দিয়ে যাবে।

তাহলে এই লম্বই দ্বিখণ্ডক ও পূর্বাঙ্কিত ব্যাসের ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হবে।

অনুশীলনী-৫

১। কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

২। কোনো ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৩। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৪। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৫। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৬। ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৭। ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা ও ভূমিতে অঙ্কিত মধ্যমা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৮। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৯। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

১০। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১১। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১২। ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

১৩। কোনো বৃত্তের AB জ্যা-এর P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে। যেন $CP^2 = AP.\ PB$ হয়।

১৪। তিনটি নির্দিষ্ট রেখাংশের চতুর্থ সমানুপাতিক নির্ণয় করতে হবে।

১৫। দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশের মধ্যসমানুপাতিক নির্ণয় করতে হবে।

১৬। একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করতে হবে।

ষষ্ঠ অধ্যায়

সমতলীয় ভেক্টর

৬.১। স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি

দৈনন্দিন জীবনে প্রায় সবক্ষেত্রেই বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। 5 সে.মি., 3 মিনিট, 12 টাকা, 5 লিটার, 6°C ইত্যাদি দ্বারা যথাক্রমে বস্তুর দৈর্ঘ্য, সময়ের পরিমাণ, টাকার পরিমাণ, আয়তনের পরিমাণ ও তাপমাত্রার পরিমাণ বোঝানো হয়। এসব পরিমাপের জন্য কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ উল্লেখ করলেই চলে। আবার যদি বলা হয় একটি লোক একবিন্দু থেকে যাত্রা করে প্রথমে 4 মি. ও পরে 5 মি. গেল, তাহলে যাত্রাবিন্দু থেকে তার দূরত্ব নির্ণয় করতে গেলে প্রথমে জানা দরকার লোকটির গতির দিক কি? গতির সঠিক দিক না জানা পর্যন্ত যাত্রাবিন্দু থেকে লোকটি কতদূর গিয়েছে তা সঠিকভাবে নির্ণয় সম্ভব নয়।

যে রাশি কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বোঝানো যায়, তাকে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়। দৈর্ঘ্য, ভর, আয়তন. দ্রুতি, তাপমাত্রা ইত্যাদি প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি।

যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়, তাকে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়। সরণ, বেগ, ত্বরণ, ওজন, বল ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

৬.২। ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ : দিকনির্দেশক রেখাংশ

কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে আদিবিন্দু (initial point) এবং অপর প্রান্তকে অন্তবিন্দু (terminal point) হিসেবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ (directed line segment) বলা হয়। কোনো দিকনির্দেশক রেখাংশের আদি বিন্দু A এবং অন্তবিন্দু B হলে ঐ দিকনির্দেশক রেখাংশকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। প্রত্যেক দিকনির্দেশক রেখাংশ একটি ভেক্টর রাশি, যার পরিমাপ ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্য ($|\overrightarrow{AB}|$ দ্বারা সূচিত) এবং যার দিক A বিন্দু হতে AB রেখা বরাবর B বিন্দু নির্দেশকারী দিক।

বিপরীতক্রমে, যেকোনো ভেক্টর রাশিকে একটি দিকনির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে রেখাংশটির দৈর্ঘ্য রাশিটির পরিমাণ এবং রেখাংশটির আদিবিন্দু হবে অন্তবিন্দু নির্দেশকারী দিক প্রদত্ত ভেক্টর রাশির দিক।

তাই, ভেক্টর রাশি ও দিকনির্দেশক রেখাংশ সমার্থক ধারণা। দিকনির্দেশককে জ্যামিতিক ভেক্টর বলেও উল্লেখ করা হয়। আমাদের আলোচনা একই সমতলে অবস্থিত ভেক্টরের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

ধারক রেখা : কোনো ভেক্টর (দিকনির্দেশক রেখাংশ) যে অসীম সরলরেখার অংশবিশেষ, তাকে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখা বা শুধু ধারক (support) বলা হয়।

সচরাচর একটি ভেক্টরকে একটি অক্ষর দিয়ে সূচিত করা হয়;

যেমন $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, কিন্তু $\overrightarrow{AB}$ লিখলে যেমন বোঝা যায় যে, ভেক্টরটির আদিবিন্দু A ও অন্তবিন্দু B, $\underline{u}$ লিখলে তেমন কোনো তথ্য পাওয়া যায় না।

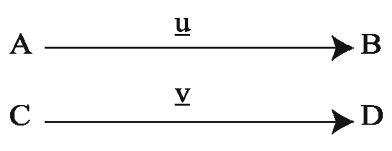
৬.৩। ভেক্টরের সমতা; বিপরীত ভেক্টর

সমান ভেক্টর : একটি ভেক্টর $\underline{u}$-কে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান বলা হয় যদি

(i) $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ ($\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য সমান $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য)

(ii) $\underline{u}$ এর ধারক, $\underline{v}$ এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হয়,

(iii) $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সঙ্গে একমুখী হয়।



সমতার এই সংজ্ঞা যে নিচের নিয়মগুলো মেনে চলে,

তা সহজেই বোঝা যায় :

(১) $\underline{u} = \underline{v}$

(২) $\underline{u} = \underline{v}$ হলে $\underline{v} = \underline{u}$

(৩) $\underline{u} = \underline{v}$ এবং $\underline{u} = \underline{w}$ হলে $\underline{v} = \underline{w}$

$\underline{u}$ এর ধারক এবং $\underline{v}$ এর ধারক রেখাদ্বয় অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, আমরা সংক্ষেপে বলব যে $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর।

দ্রষ্টব্য : যেকোনো বিন্দু থেকে প্রদত্ত যেকোনো ভেক্টরের সমান করে একটি ভেক্টর টানা যায়।

কেননা, বিন্দু P এবং ভেক্টর $\underline{u}$ দেওয়া থাকলে, আমরা P বিন্দু দিয়ে $\underline{u}$ এর ধারকের সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা টানি, তারপর P বিন্দু থেকে $\underline{u}$ এর দিক বরাবর ($\underline{u}$) এর সমান করে PQ রেখাংশ কেটে নিই। তাহলে অঙ্কন অনুযায়ী $\overrightarrow{PQ} = \underline{u}$ হবে।

বিপরীত ভেক্টর : $\underline{v}$ -কে $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বলা হয়, যদি

(i) $|\underline{v}| = |\underline{u}|$

(ii) $\underline{v}$ এর ধারক, $\underline{u}$ এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন বা সমান্তরাল হয়।

(iii) $\underline{v}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত হয়।

$\underline{v}$ যদি $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হয় তবে $\underline{u}$ হবে $\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর। সমতার সংজ্ঞা থেকে বোঝা যায় যে, $\underline{v}$ এবং $\underline{w}$ প্রত্যেকে $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হলে $\underline{v} = \underline{w}$ হবে। অতএব, যেকোনো ভেক্টরের একটিমাত্র বিপরীত ভেক্টর রয়েছে।

$\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বোঝাতে $-\underline{u}$ লেখা হয়।

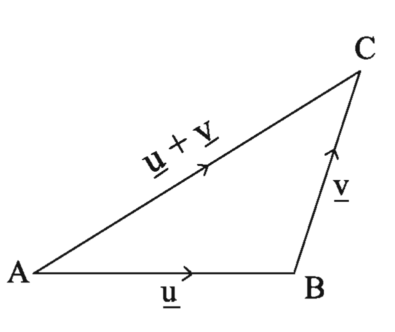
$\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ হলে $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$.

দ্রষ্টব্য : পৃঃ ৫৪ (৬.৬ এর ২ খ) এবং পৃঃ ৫৫ দ্রষ্টব্য (২)

৬.৪। ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ

১। (ক) ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি

ভেক্টর যোগের সংজ্ঞা : কোনো $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বোঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু।

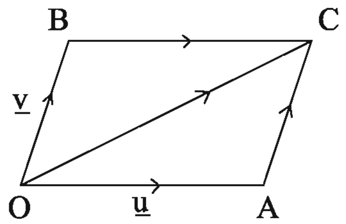


মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ এরূপ দুইটি ভেক্টর যে, $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু। তাহলে $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু সংযোজক $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরকে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমষ্টি বলা হয় এবং $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা সূচিত হয়।

$\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরোক্ত যোজন পদ্ধতিকে ত্রিভুজ বিধি বলা হয়।

(খ) ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধির অনুসিদ্ধান্ত হিসেবে ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি নিম্নরূপ : কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়।



প্রমাণ : মনে করি, যেকোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয় OA এবং OB দ্বারা সূচিত হয়েছে। OACB সামান্তরিক ও তার OC কর্ণ অঙ্কন করি। তাহলে ঐ সামান্তরিকের OC কর্ণ দ্বারা $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর যোগফল সূচিত হবে।

অর্থাৎ $\overrightarrow{OC} = \underline{u} + \underline{v}$ (ভেক্টর স্থানান্তরের মাধ্যমে)

OACB সামান্তরিকের OB ও AC বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \underline{v}$ (ভেক্টর স্থানান্তরের মাধ্যমে)

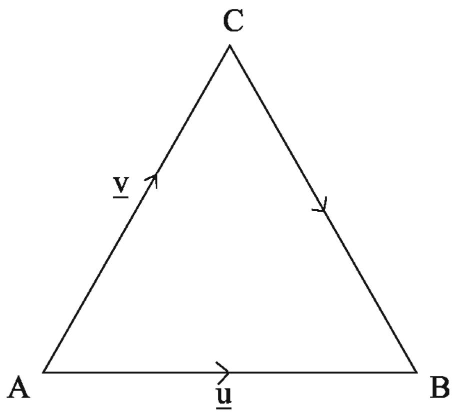
$\therefore \quad \underline{u} + \underline{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

দ্রষ্টব্য : (১) দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের লব্ধিও বলা হয়। বল বা বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের পদ্ধতি অনুসরণ করতে হয়।

(২) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়, কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

২। ভেক্টরের বিয়োগ :

$\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল $\underline{u} - \underline{v}$ বলতে $\underline{u}$ এবং $(-\underline{v})$ ($\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর) ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল $\underline{u} + (-\underline{v})$ বোঝায়।



ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি

$\underline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$ হলে

$\underline{u} - \underline{v} = \overrightarrow{CB}$; অর্থাৎ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

কথায় : $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু একই হলে

$\underline{u} - \underline{v}$ সেই ভেক্টর, যার আদিবিন্দু হচ্ছে $\underline{v}$ এর অন্তবিন্দু এবং যার অন্তবিন্দু হচ্ছে $\underline{u}$ এর অন্তবিন্দু।

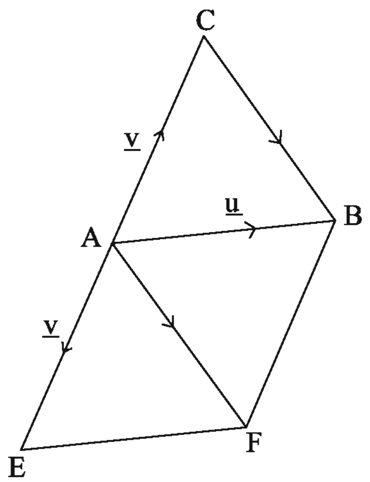
সংক্ষেপে : একই আদিবিন্দু বিশিষ্ট দুইটি ভেক্টরের বিয়োগফল হচ্ছে অন্তবিন্দুদ্বয় দ্বারা বিপরীতক্রমে গঠিত ভেক্টর।

প্রমাণ : CA রেখাংশকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন AE = CA হয়।

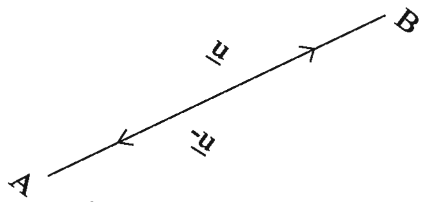
AEFB সামান্তরিক গঠন করি। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি অনুযায়ী,

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AF}$

আবার AFBC একটি সামান্তরিক, কেননা BF = AE = CA
এবং BF || AE বলে BF || CA.
$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CB}$ ভেক্টর স্থানান্তর
কিন্তু $\overrightarrow{AE} = -\underline{v}$ এবং $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$
সুতরাং $\underline{u} + (-\underline{v}) = \overrightarrow{CB}$ প্রমাণিত হল।



৩। শূন্য ভেক্টর : যে ভেক্টরের পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না তাকে শূন্য ভেক্টর বলে।
$\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর হলে $\underline{u} + (-\underline{u})$ কি হবে?
ধরি $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ তখন $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$, ফলে
$\underline{u} + (-\underline{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$
$= \overrightarrow{AA}$ (ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী)



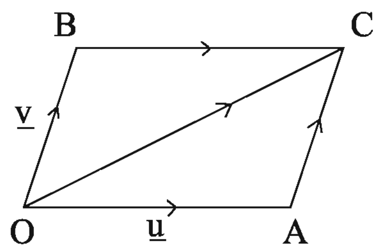
কিন্তু $\overrightarrow{AA}$ কি ধরনের ভেক্টর? এটি একটি বিন্দু ভেক্টর, অর্থাৎ এর আদিবিন্দু B অন্তবিন্দু একই বিন্দু; সুতরাং দৈর্ঘ্য শূন্য।
অর্থাৎ $\overrightarrow{AA}$ দ্বারা বিন্দুকেই A বুঝতে হবে। এরূপ ভেক্টর (যার দৈর্ঘ্য শূন্য) কে শূন্য ভেক্টর বলা হয় এবং $\underline{o}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। এই একমাত্র ভেক্টর যার কোনো নির্দিষ্ট দিক বা ধারকরেখা নেই।
শূন্য ভেক্টরের অবতারণার ফলে আমরা বলতে পারি যে, $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{o}$
এবং $\underline{u} + \underline{o} = \underline{o} + \underline{u} = \underline{u}$
বস্তুত শূন্য ভেক্টরের সঙ্গে শেষোক্ত অভেদ নিহিত রয়েছে।

৬.৫। ভেক্টর যোগের বিধিসমূহ

১। ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি (Commutative Law)
যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$, OACB সামান্তরিক ও তার কর্ণ OC অঙ্কন করি।
OA ও BC সমান ও সমান্তরাল এবং OB ও AC সমান ও সমান্তরাল।
$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$
আবার $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \underline{v} + \underline{u}$
$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

$\therefore$ ভেক্টর যোজন বিনিময় বিধি সিদ্ধ করে।



ভেক্টর যোজনের সংযোগ বিধি (Associative Law)
যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{w}$

অর্থাৎ $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু থেকে $\underline{v}$ এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু থেকে $\underline{w}$ অঙ্কন করা হয়েছে। O, C এবং A, C যোগ করি।

তাহলে $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC}$

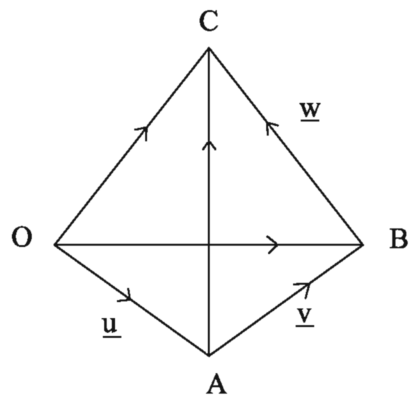
$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

আবার $\underline{u} + (\underline{v} - \underline{w}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

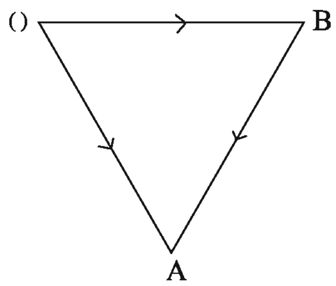
সুতরাং ভেক্টর যোজন সংযোগ বিধি সিদ্ধ করে।



অনুসিদ্ধান্ত : কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর একই ক্রম দ্বারা সূচিত ভেক্টরত্রয়ের যোগফল শূন্য।

উপরের চিত্রে, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} = (-\overrightarrow{AO})$

$\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} = 0$



৩। ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি (Cancellation Law)

যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে, $\underline{v} = \underline{w}$ হবে।

প্রমাণ : যেহেতু $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$

$\therefore \underline{u} + \underline{v} + (-\underline{u}) = \underline{u} + \underline{w} + (-\underline{u})$ (উভয়পক্ষে - $\underline{u}$ যোগ করে)

বা, $\underline{u} - \underline{u} + \underline{v} = \underline{u} - \underline{u} + \underline{w}$

বা, $\underline{v} = \underline{w}$

৬.৬। ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a vector)

$\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে $m\underline{u}$ দ্বারা কোন ভেক্টর বোঝায়, নিচে তা ব্যাখ্যা করা হল।

(১) $m = 0$ হলে $m\underline{u} = \underline{0}$

(২) $m \neq 0$ হলে $m\underline{u}$ এর ধারক $\underline{u}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন;

$m\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য এর দৈর্ঘ্যের (m) গুণ এবং

(ক) $m > 0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের সাথে অভিন্ন

(খ) $m < 0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত।

দ্রষ্টব্য : (১) $m = 0$ অথবা $\underline{u} = \underline{0}$ হলে $m\underline{u} = \underline{0}$

(২) $1\,\underline{u} = \underline{u}$, $(-1)\,\underline{u} = -\underline{u}$

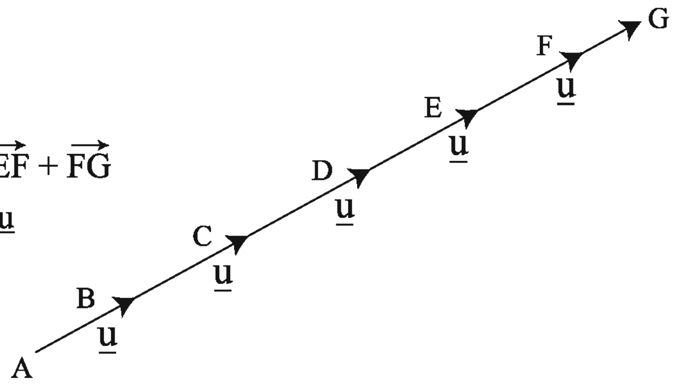
উপরিউক্ত সংজ্ঞা হতে দেখা যায় যে, $m\,(n\underline{u}) = n\,(m\underline{u}) = mn\,(\underline{u})$

mn উভয়ে > 0, উভয়ে < 0 একটি > 0 অপরটি < 0, একটি বা উভয় 0, এ সকল ক্ষেত্রেও পৃথক পৃথকভাবে বিবেচনা করে সহজেই সূত্রটির বাস্তবতা সম্পর্কে নিশ্চিত হওয়া যায়। নিচে এর একটি উদাহরণ দেয়া হল :

মনে করি $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \underline{u}$

AC কে G পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করি যেন

CD = DE = EF = FG = AB হয়।



তখন $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$

$= \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} + \underline{u} = 6\underline{u}$

অন্যদিকে $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EG}$

$= 2\underline{u} + 2\underline{u} + 2\underline{u}$

$= 3\ (2\ \underline{u})$

এবং $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = 3\underline{u} + 3\underline{u} = 2(3\underline{u})$

$\therefore\ \ 2(3\underline{u}) = 3(2\underline{u}) = 6\underline{u}$

দ্রষ্টব্য : দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, এদের একটিকে অপরটির সাংখ্যগুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়।

বাস্তবিক AB || CD হলে

$\overrightarrow{AB} = m\ \overrightarrow{CD}$, যেখানে, $|\ m\ | = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{AB}{CD}$

m > 0 হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী হয়,

m < 0 হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী হয়।

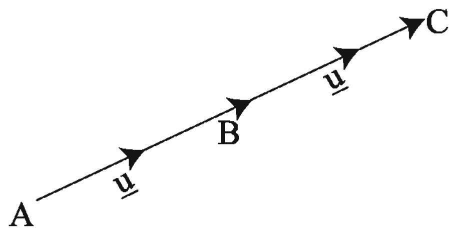
৬.৭। ভেক্টরে সাংখ্যগুণিতক সংক্রান্ত বণ্টন সূত্র

(Distributive laws concerning scalar multiples of vectors)

m, n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{u}$, $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে,

(১) $(m + n)\ \underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

(২) $m\ (\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$



প্রমাণ : (১) m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।

মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$

$\therefore\ \ |\overrightarrow{AB}| = m\ |\ \underline{u}\ |$

AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $|\ \overrightarrow{BC}\ | = n\ |\ \underline{u}\ |$ হয়।

$\therefore\ \ \overrightarrow{BC} = n\underline{u}$ এবং

$|\ \overrightarrow{AC}\ | = |\ \overrightarrow{AB}\ | + |\ \overrightarrow{BC}\ | = m\ |\ \underline{u}\ | + n\ |\ \underline{u}\ | = (m + n)\ |\ \underline{u}\ |$

$\therefore\ \ \overrightarrow{AC} = (m + n)\ \underline{u}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore\ m\underline{u} + n\underline{u} = (m+n)\,\underline{u}$

m, n উভয়ে ঋণাত্মক হলে $(m+n)\,\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে

$(m+n)\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত দিক, তখন

$m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m|\ |\underline{u}| + |n|\,|\underline{u}| = (|m| + |n|)\,|\underline{u}|$

এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক। যেহেতু $m < 0$ এবং $n < 0$ হলে

$|m| + |n| = |m+n|$ হয়, সেহেতু এক্ষেত্রেও

$(m+n)\,\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ পাওয়া হল।

সর্বশেষে m এবং n এর মধ্যে একটি > 0, অপরটি < 0 হলে $(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $(|m| - |n|)$ এবং দিক হবে

(ক) $\underline{u}$ এর দিকের সাথে একমুখী যখন $|m| > |n|$

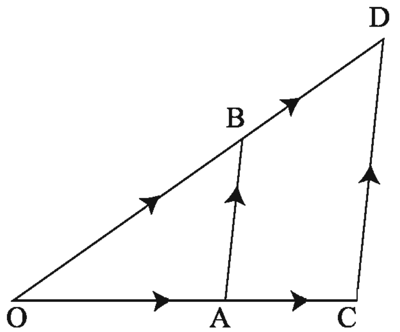
(খ) $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক যখন $|m| < |n|$

তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটিও দৈর্ঘ্যে ও দিকে $(m+n)\,\underline{u}$ এর সাথে একমুখী হবে।

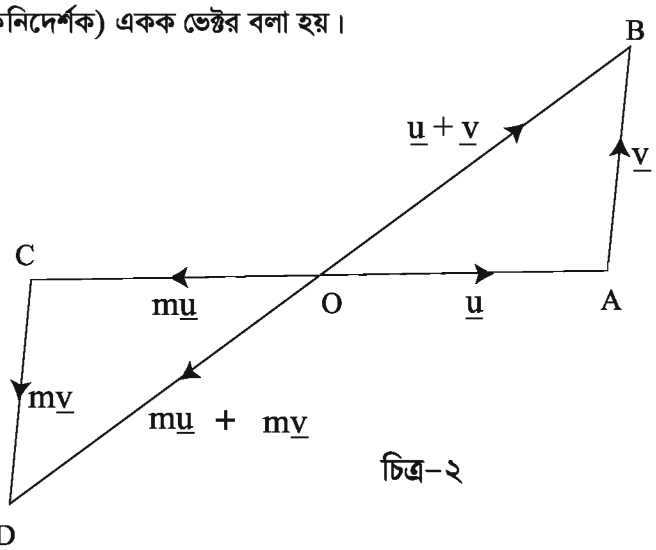
দ্রষ্টব্য : তিনটি বিন্দু A, B, C সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ এর সাংখ্যগুণিতক হয়।

মন্তব্য : ১। দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হলে এবং তাদের দিক একই হলে, তাদের সদৃশ (similar) ভেক্টর বলা হয়।

২। যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য ১ একক, তাকে (দিকনির্দেশক) একক ভেক্টর বলা হয়।



চিত্র–১



চিত্র–২

মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$

তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = m.OA হয়। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল CD রেখা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

যেহেতু $\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$

$\therefore\ \overrightarrow{CD} = m\,\overrightarrow{AB} = m\underline{v}$

চিত্র-১ এ m ধনাত্মক, চিত্র-২ এ m ঋণাত্মক

$\therefore\ \overrightarrow{OC} = m.\,\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{CD} = m.\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{OD} = m.\,\overrightarrow{OB}$

এক্ষণে $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} \quad m(\overrightarrow{OA}) + m\,(\overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{OB})$

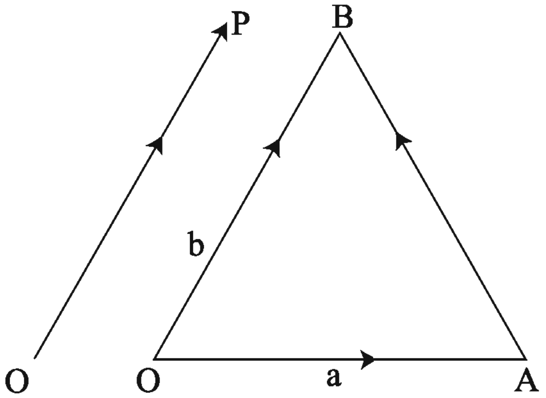
$\therefore\ m\underline{u} + m\underline{v} = m\,(\underline{u} + \underline{v})$.

দ্রষ্টব্য ঃ m এর সকল মানের জন্য উপরোক্ত সূত্র সত্য।

৬.৮। অবস্থান ভেক্টর (Position Vector)

সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট O বিন্দু সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু (origin) বলা হয়।

মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করলে উৎপন্ন $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরকে O বিন্দুর পরিপ্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। অনুরূপভাবে, একই O বিন্দুর প্রেক্ষিতে একই সমতলে অপর B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$. A, B যোগ করি।



মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ অর্থাৎ $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

সুতরাং দুইটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর জানা থাকলে তাদের সংযোজক রেখা দ্বারা সূচিত ভেক্টর ঐ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর থেকে আদিবিন্দুর ভেক্টর বিয়োগ করে পাওয়া যাবে।

দ্রষ্টব্য : বিভিন্ন ভেক্টর মূলবিন্দু সাপেক্ষে একই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। কোনো নির্দিষ্ট প্রতিপাদ্য বিষয়ের সমাধানে এ বিষয়ের বিবেচনাধীন সকল বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর একই মূলবিন্দু সাপেক্ষে ধরা হয়।

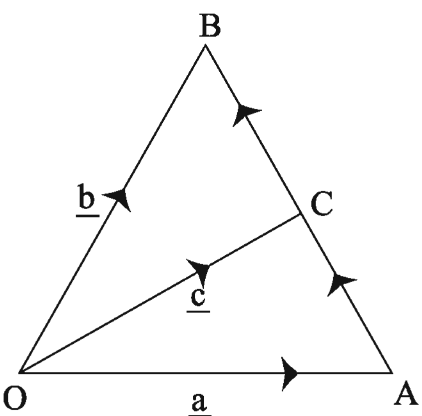
৬.৯। অন্তর্বিভক্তিকরণ সূত্র (Internal Division Formula)

(১) দুইটি বিন্দু A, B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ হলে $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$.

(২) A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে A, B, C সমরেখ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\overrightarrow{AC} = K.\overrightarrow{AB}$ হয়। অর্থাৎ যদি $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক হয়।

A, B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b হলে AB রেখাংশ C বিন্দুতে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \dfrac{n\underline{a} + m\underline{b}}{m+n}$ হবে।

প্রমাণ : দেওয়া আছে, $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \dfrac{m}{n}$ বা, $\dfrac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{n}{m}$



$$\therefore\ \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC| + |CB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AC|} + \frac{|CB|}{|AC|}$$

$$= 1 + \frac{n}{m} = \frac{m+n}{m}$$

অর্থাৎ $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{m}{m+n}$

$\therefore\ \overrightarrow{AC} = \left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{AB}$

অর্থাৎ $\underline{c} - \underline{a} = \frac{m}{m+n}(\underline{b} - \underline{a})$

$\therefore\ \underline{c} = \frac{m}{m+n}(\underline{b} - \underline{a}) + \underline{a} = \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\underline{a} + \frac{m\underline{b}}{m+n} = \frac{n\underline{a}}{m+n} + \frac{m\underline{b}}{m+n} = \frac{n\underline{a}+m\underline{b}}{m+n}.$

দ্রষ্টব্য : AB রেখাংশ C বিন্দুতে m ঃ n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$\underline{c} = \frac{m\underline{a} - n\underline{b}}{m - n}$

বিশেষ ক্ষেত্র : C বিন্দুটি AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে m = n = 1 হয়।

$\therefore\ \underline{c} = \frac{\underline{a} + \underline{b}}{m - n} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}).$

৬.১০। কতিপয় উদাহরণ

উদাহরণ ১। দেখাও যে, (ক) $-(-\underline{a}) = \underline{a}$

(খ) $-m(\underline{a}) = m(-\underline{a}) = -m\underline{a}$. m একটি স্কেলার।

(গ) $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ একটি একক ভেক্টর, যখন $\underline{a} \neq \underline{0}$

সমাধান : (ক) বিপরীত ভেক্টরের ধর্ম অনুযায়ী $\underline{a} + (-\underline{a}) = 0$

আবার $(-\underline{a}) + \{-(-\underline{a})\} = \underline{0}$

$\therefore\ -(-\underline{a}) + (-\underline{a}) = \underline{a} + (-\underline{a})$

$\therefore\ -(-\underline{a}) = \underline{a}$ [ভেক্টর যোগের বর্জনবিধি]

(খ) $m\underline{a} + (-m)\underline{a} = \{m + (-m)\}\underline{a}$

$= 0\underline{a} = \underline{0}$

$\therefore\ (-m)\,\underline{a} = -m\underline{a}$ ......(1)

আবার $m\underline{a} + m(-\underline{a}) = m\{\underline{a} + (-\underline{a})\}$

$= m\underline{0} = \underline{0}$

$\therefore\ m(-\underline{a}) = -m\underline{a}$ ....(2)

(1) এবং (2) থেকে $(-m)\underline{a} = m(-\underline{a}) = -m\underline{a}$

(গ) মনে করি $\underline{a}$ অশূন্য $\underline{\hat{a}}$ হয়। ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{\hat{a}}$ একটি একক ভেক্টর এবং $\underline{a}$ ভেক্টরের দৈর্ঘ্য a

অর্থাৎ $|\underline{a}| = a$

তাহলে $\underline{a} = a\,\underline{\hat{a}} = |\underline{a}|\,\underline{\hat{a}}$ এখানে $|\underline{a}| = a$ একটি স্কেলার যা অশূন্য কারণ $a \neq \underline{0}$

$\therefore\ \frac{\underline{a}}{|\underline{a}|} = \frac{|a|\underline{\hat{a}}}{|\underline{a}|} = \underline{\hat{a}}$ একটি একক ভেক্টর।

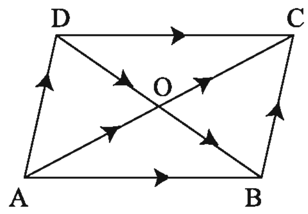
উদাহরণ ২। ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD ।

(ক) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান : (ক) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

আবার, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ বা $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$



(খ) যেহেতু সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়

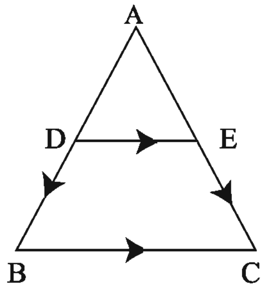
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

উদাহরণ ৩। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক।

সমাধান : মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \,||\, BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$



প্রমাণ : ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ ....(1)

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$

[∵ D, E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

∴ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ থেকে পাই

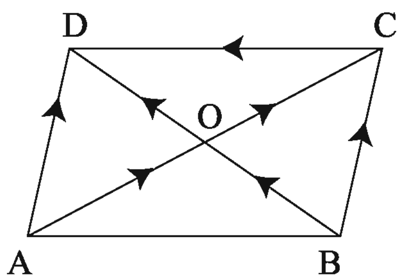
$2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ অর্থাৎ $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}$

∴ $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$, [(1) হতে]

সুতরাং $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ বা $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল।

উদাহরণ ৪। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



সমাধান : মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

মনে করি, $\overrightarrow{AO} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BO} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|$, $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

যেহেতু সামান্তরিকের বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল, $\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

অর্থাৎ $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$ [উভয় পক্ষে $- \underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

$\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC। $\therefore$ $\underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC.

$\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD। $\therefore$ $\underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD.

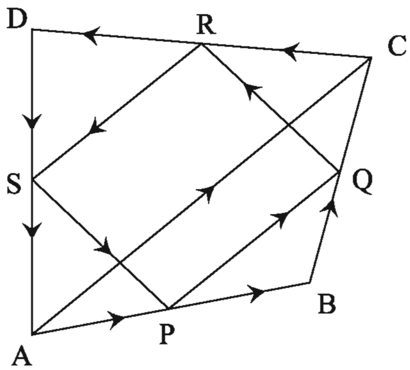
$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু AC ও BD দুইটি পৃথক অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না।

$\therefore$ $\underline{a} - \underline{c} = 0$ বা $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$ বা $\underline{b} = \underline{d}$

$\therefore$ $|\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণ ৫। ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।



সমাধান : মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S, S ও P এবং A, C যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{b} = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

PQRS একটি সামান্তরিক।

অনুশীলনী - ৬

১। ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F হলে,

(ক) $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CF}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{BE}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(গ) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{BE}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

আরও প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

২। ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

৩। দেখাও যে, (ক) $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$,

(খ) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

৪। দেখাও যে, (ক) $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ (খ) $(m - n)\,\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$

(গ) $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$.

৫। (ক) $\underline{a}, \underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখাও যে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি a, b এর সমান্তরাল হয়।

(খ) $\underline{a}, \underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে দেখাও যে, $m = n = 0$.

৬। A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

৭। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

৮। প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

৯। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

১০। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। যে ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট দিক ও ধারকরেখা নেই তা কী ?

ক. একক ভেক্টর খ. শূন্য ভেক্টর
গ. বিপরীত ভেক্টর ঘ. অবস্থান ভেক্টর

২। $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$ এবং $m>o$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সম্পর্কে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমান ভেক্টর
খ. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীত ভেক্টর
গ. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী ভেক্টর
ঘ. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী ভেক্টর

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ এবং $\underline{c} = \frac{n\underline{a}+m\underline{b}}{m+n}$; যেখানে AB রেখাংশ C বিন্দুতে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে।

৩। C বিন্দুটি AB এর মধ্যবিন্দু হলে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. $c = \frac{n\underline{a}+m\underline{b}}{2}$
খ. $c = \frac{n\underline{a}-m\underline{b}}{2}$
গ. $c = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}$
ঘ. $c = \frac{\underline{a}-\underline{b}}{2}$

৪। C বিন্দুটি AB রেখাংশকে 2 ঃ 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. $5\underline{C} = 3\underline{a} + 2\underline{b}$
খ. $5\underline{C} = 2\underline{a} + 3\underline{b}$
গ. $\underline{C} = 3\underline{a} + 2\underline{b}$
ঘ. $3\underline{C} = 5\underline{a} + 2\underline{b}$

৫। $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ হলে

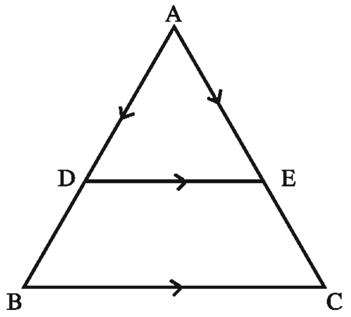
i. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ এর ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল
ii. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ এর দৈর্ঘ্য সমান ও দিক একই
iii. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{PQ}$ এর দৈর্ঘ্য সমান ও দিক বিপরীত

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i খ. ii
গ. i ও ii ঘ. i ও iii

সৃজনশীল প্রশ্ন

১।



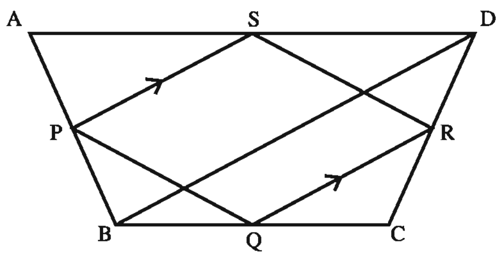
চিত্রে $\triangle ABC$ এ AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত DE রেখাংশ BC এর সমান্তরাল।

ক. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$ এর মান কত ? $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ কেন ?

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।

গ. DBCE ট্রাপিজিয়ামের DB ও EC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P এবং Q হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQ || DE || BC এবং PQ = $\frac{1}{2}$ (DE + BC)

২।



ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং DA বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S। A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, এবং $\underline{d}$

ক. P বিন্দু অবস্থান ভেক্টর এবং AB এর মান নির্ণয় কর।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

গ. PBDS ট্রাপিজিয়ামে PB ও SD এর তীর্যক বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || PS || BD এবং MN = $\frac{1}{2}$ BD

সপ্তম অধ্যায়

ঘন জ্যামিতি

সরলরেখা ও সমতল : মৌলিক ধারণা ও প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

৭.১। মৌলিক ধারণা

মাধ্যমিক জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা ও তলের মৌলিক ধারণা আলোচিত হয়েছে। ঘন জ্যামিতিতেও বিন্দু, রেখা ও তল মৌলিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করা হয়।

১। বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটিকে ঐ বস্তুর মাত্রা (dimension) বলা হয়।

২। বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। এটি একটি ধারণা। বাস্তবে বোঝার জন্যে আমরা একটি ডট্ (.) ব্যবহার করি। একে অবস্থানের প্রতিরূপ বলা যেতে পারে। সুতরাং বিন্দুর কোনো মাত্রা নেই। তাই বিন্দু শূন্য মাত্রিক।

৩। রেখার কেবলমাত্র দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। তাই রেখা একমাত্রিক।

৪। তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, উচ্চতা নেই। তাই তল দ্বিমাত্রিক।

৫। যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে, তাকে ঘনবস্তু বলা হয়। সুতরাং ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক।

৭.২। কতিপয় প্রাথমিক সংজ্ঞা

১। সমতল (Plane surface) : কোনো তলের উপরস্থ যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণরূপে ঐ তলের উপর অবস্থিত হলে, ঐ তলকে সমতল বলা হয়। পুকুরের পানি স্থির থাকলে ঐ পানির উপরিভাগ একটি সমতল। সিমেন্ট দিয়ে নির্মিত বা মোজাইককৃত ঘরের মেঝেকে আমরা সমতল বলে থাকি। কিন্তু জ্যামিতিকভাবে তা সমতল নয়, কারণ ঘরের মেঝেতে কিছু উঁচু-নিচু থাকেই।

দ্রষ্টব্য : অন্য কিছু উল্লেখ না থাকলে ঘন জ্যামিতিতে রেখা বা দৈর্ঘ্য এবং তলের বিস্তার অসীম (infinite) বা অনির্দিষ্ট মনে করা হয়। সুতরাং তলের সংজ্ঞা থেকে অনুমান করা যায় যে, কোনো সরল রেখার একটি অংশ কোনো তলের ওপর থাকলে তার অপর কোনো অংশ ঐ তলের বাইরে থাকতে পারে না।

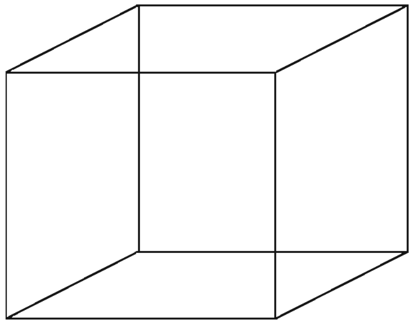
২। বক্রতল (Curved surface) : কোনো তলের ওপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণরূপে ঐ তলের ওপর অবস্থিত না হলে, ঐ তলকে বক্রতল বলা হয়। গোলকের পৃষ্ঠতল একটি বক্রতল।

৩। ঘন জ্যামিতি (Solid geometry) : গণিত শাস্ত্রের যে শাখার সাহায্যে ঘনবস্তু এবং তল, রেখা ও বিন্দুর ধর্ম জানা যায়, তাকে ঘন জ্যামিতি বলা হয়। কখনও কখনও একে জাগতিক জ্যামিতি (Geometry of space) বা ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিও (Geometry of three dimensions) বলা হয়।

৪। একতলীয় রেখা (Coplanar straight lines) : একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত হলে, বা তাদের সকলের মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন করা সম্ভব হলে ঐ সরলরেখাগুলোকে একতলীয় বলা হয়।

৫। নৈকতলীয় রেখা (Skew or non coplanar lines) : একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত না হলে বা তাদের মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন করা সম্ভব না হলে এ সরলরেখাগুলোকে নৈকতলীয় বলা হয়। দুইটি পেন্সিলকে একটির ওপর আর একটি দিয়ে যোগ বা গুণচিহ্ন আকৃতির একটি বস্তু উৎপন্ন করলেই দুইটি নৈকতলীয় সরলরেখা উৎপন্ন হবে।

৬। সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel line) : দুইটি একতলীয় সরলরেখা যদি পরস্পর ছেদ না করে অর্থাৎ যদি তাদের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে তাদের সমান্তরাল সরলরেখা বলা হয়।

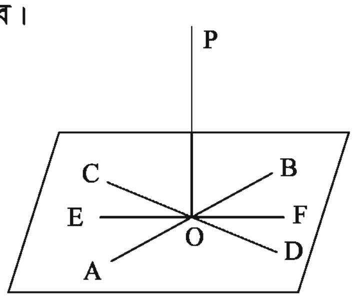


৭। সমান্তরাল তল (Parallel planes) : দুইটি সমতল যদি পরস্পর ছেদ না করে অর্থাৎ যদি তাদের কোনো সাধারণ রেখা না থাকে, তবে ঐ তলদ্বয়কে সমান্তরাল তল বলা হয়।

৮। সমতলের সমান্তরাল রেখা : একটি সরলরেখা ও একটি সমতলকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও যদি তারা পরস্পর ছেদ না করে, তবে ঐ সরলরেখাকে উক্ত তলের সমান্তরাল রেখা বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : সাধারণ ত্রিমাত্রিক বস্তুর ছবি দ্বিমাত্রিক কাগজ বা বোর্ডে অঙ্কন কিছুটা জটিল। তাই শ্রেণীকক্ষে পাঠদানকালে প্রত্যেকটি সংজ্ঞার ব্যাখ্যার সঙ্গে তার একটি চিত্র অঙ্কন করে দেখিয়ে দিলে বিষয়টি শিক্ষার্থীদের পক্ষে বোঝা ও মনে রাখা সহজতর হবে।

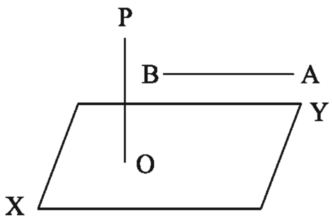
৯। তলের লম্ব রেখা (Normal or perpendicular to a plane) : কোনো সরলরেখা একটি সমতলের উপরস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলের ওপর অঙ্কিত যেকোনো রেখার উপর লম্ব হলে, উক্ত সরলরেখাকে ঐ সমতলের উপর লম্ব বলা হয়।



১০। তির্যক (Oblique) রেখা : কোনো সরলরেখা একটি সমতলের সাথে সমান্তরাল বা লম্ব না হলে, ঐ রেখাকে সমতলের তির্যক রেখা বলা হয়।

১১। উল্লম্ব (Vertical) রেখা বা তল : স্থির অবস্থায় ঝুলন্ত ওলনের সুতার সঙ্গে সমান্তরাল কোন রেখা বা তলকে খাড়া বা উল্লম্ব তল বলে।

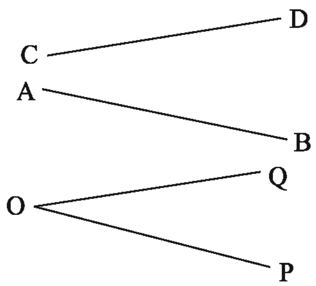
১২। **অনুভূমিক** (Horizontal) তল ও রেখা : কোনো সমতল একটি খাড়া সরলরেখার সাথে লম্ব হলে, তাকে শয়ান বা অনুভূমিক তল বলা হয়। আবার কোনো অনুভূমিক তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখাকে অনুভূমিক সরলরেখা বলা হয়।



১৩। সমতল ও নৈকতলীয় চতুর্ভুজ : কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে একই তলে অবস্থিত হলে, তাকে সমতল চতুর্ভুজ বলা হয়। আবার কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে একই তলে অবস্থিত না হলে, ঐ চতুর্ভুজকে নৈকতলীয় চতুর্ভুজ বলা হয়। নৈকতলীয় চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু একতলে এবং অপর দুইটি অন্য তলে অবস্থিত। সুতরাং কোনো নৈকতলীয় চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় নৈকতলীয়।

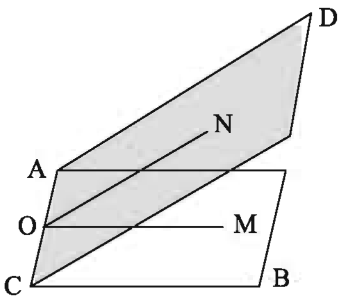
১৪। নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ : দুইটি নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ তাদের যেকোনো একটি ও তার উপরস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত অপরটির সমান্তরাল রেখার অন্তর্গত কোণের সমান। আবার দুইটি নৈকতলীয় রেখার প্রত্যেকের সমান্তরাল দুইটি রেখা কোনো বিন্দুতে অঙ্কন করলে ঐ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাণ ও নৈকতলীয় রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান।

মনে করি, AB ও CD দুইটি নৈকতলীয় রেখা। যেকোনো O বিন্দুতে AB ও CD এর সমান্তরাল যথাক্রমে OP এবং OQ রেখাদ্বয় অঙ্কন করলে $\angle POQ$–ই AB ও CD এর অন্তর্গত কোণ নির্দেশ করবে।

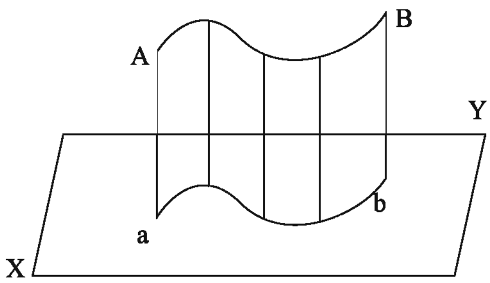


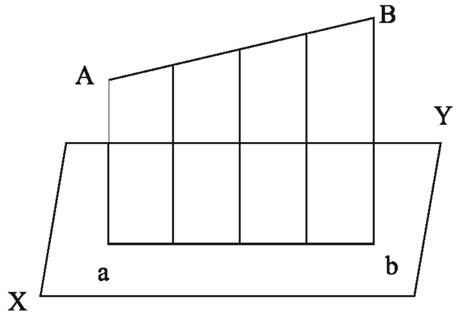
১৫। দ্বিতল কোণ (Dihedral angle) : দুইটি সমতল এক সরলরেখায় ছেদ করলে তাদের ছেদ রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলদ্বয়ের প্রত্যেকের উপর ঐ ছেদ রেখার সাথে লম্ব এরূপ একটি করে রেখা অঙ্কন করলে উৎপন্ন কোণই ঐ সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ।

AB ও CD সমতলদ্বয় AC রেখায় পরস্পর ছেদ করেছে। AC রেখাস্থ O বিন্দুতে AB সমতলে OM এবং CD সমতলে ON এরূপ দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করা হল যেন তারা উভয়ই AC এর সঙ্গে O বিন্দুতে লম্ব হয়। তাহলে $\angle MON$–ই AB ও CD সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ সূচিত করে। দুইটি পরস্পরছেদী সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণের পরিমাণ এক সমকোণ হলে, ঐ সমতলদ্বয় পরস্পর লম্ব।



১৬। অভিক্ষেপ : কোনো বিন্দু থেকে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর বা কোনো সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বরেখার পাদবিন্দুকে ঐ রেখা বা সমতলের উপর উক্ত বিন্দুর পাতন বা অভিক্ষেপ (Projection) বলা হয়। কোনো সরলরেখা বা বক্ররেখার সকল বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বগুলোর পাদবিন্দুসমূহের সেটকে ঐ সমতলের উপর উক্ত সরলরেখা বা বক্ররেখার অভিক্ষেপ বলা হয়। এই অভিক্ষেপকে লম্ব অভিক্ষেপও (Orthogonal Projection) বলা হয়।





চিত্রে XY সমতলের উপর একটি বক্ররেখা ও একটি সরলরেখার অভিক্ষেপ দেখানো হয়েছে।

৭.৩। দুইটি সরলরেখার মধ্যে সম্পর্ক

(ক) দুইটি সরলরেখা একতলীয় হতে পারে, সেক্ষেত্রে তারা অবশ্যই সমান্তরাল হবে বা কোনো এক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করবে।

(খ) দুইটি সরলরেখা নৈকতলীয় হতে পারে, সেক্ষেত্রে তারা সমান্তরালও হবে না কিংবা কোনো বিন্দুতে ছেদও করবে না।

৭.৪। স্বতঃসিদ্ধ

(ক) কোনো সমতলের উপরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও তা সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত থাকবে। সুতরাং একটি সরলরেখা ও একটি সমতলের মধ্যে দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকলে, ঐ সরলরেখা বরাবর তাদের মধ্যে অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

(খ) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা একটি সরলরেখার মধ্য দিয়ে অসংখ্য সমতল অঙ্কন করা যায়।

৭.৫। সরলরেখা ও সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

(ক) একটি সরলরেখা একটি সমতলের সঙ্গে সমান্তরাল হলে তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

(খ) একটি সরলরেখা কোনো সমতলকে ছেদ করলে তাদের মধ্যে মাত্র একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে।

(গ) যদি কোনো সরলরেখা ও সমতলের দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তাহলে সরলরেখাটি সম্পূর্ণ ঐ সমতলে অবস্থিত হবে।

৭.৬। দুইটি সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

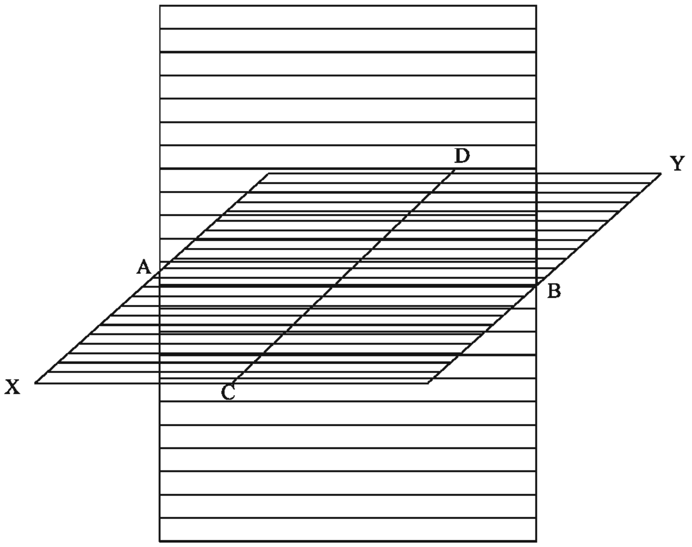
(ক) দুইটি সমতল পরস্পর সমান্তরাল হলে তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

(খ) দুইটি সমতল পরস্পরছেদী হলে তারা একটি সরলরেখায় ছেদ করবে এবং তাদের অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

৭.৭। সমতল ও সরলরেখা সংক্রান্ত কতিপয় প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা

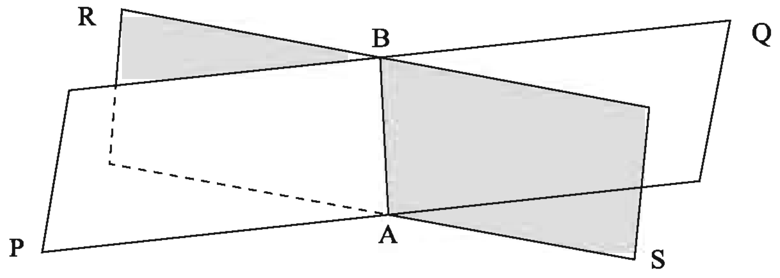
ঘন জ্যামিতির উচ্চতর বিষয় অধ্যয়নে কতকগুলো উপপাদ্যের বিষয়বস্তু জানা প্রয়োজন। এই উপপাদ্যগুলোর প্রমাণ বর্তমান আলোচনার অন্তর্ভুক্ত নয়। তাই প্রমাণ ব্যতীত ঐ সকল উপপাদ্যের সাধারণ সূত্রগুলোর চিত্রসহ বর্ণনা ও সংক্ষিপ্ত ব্যাখ্যা নিম্নে প্রদত্ত হল।

(১) দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখার মধ্য দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল অঙ্কন করা যায়।



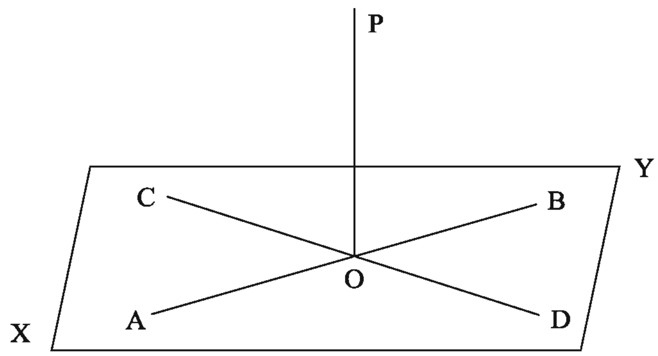
AB এবং CD দুইটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাদের মধ্য দিয়ে একটি এবং কেবলমাত্র একটি সমতল অঙ্কন করা যাবে। একে AB ও CD রেখাদ্বয়ের ধারক সমতল বলা হয়।

(২) দুইটি পরস্পরছেদী সমতল একটি সরলরেখায় ছেদ করে এবং এর বাইরে কোনো বিন্দুতে ছেদ করে না।



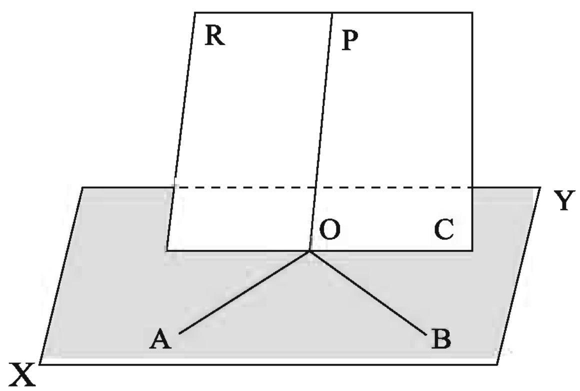
PQ এবং RS দুইটি পরস্পরছেদী সমতল। তারা AB সরলরেখায় ছেদ করেছে এবং AB সরলরেখার বাইরে কোনো বিন্দুতে ছেদ করবে না।

(৩) দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখার ছেদবিন্দুতে কোনো সরলরেখা তাদের প্রত্যেকের উপর লম্ব হলে ঐ রেখাটি উক্ত রেখাদ্বয়ের ধারক সমতলের উপরও লম্ব হবে।



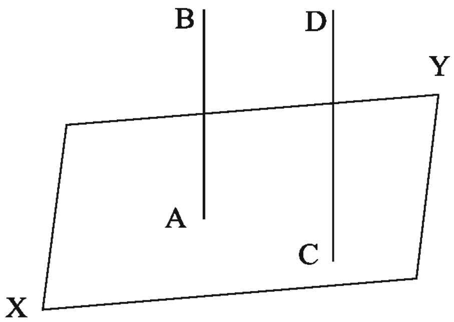
XY সমতলে AB ও CD দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করেছে। OP সরলরেখাটি উক্ত রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে তাদের প্রত্যেকের সঙ্গে লম্ব হলে OP সরলরেখা XY সমতলের উপরও লম্ব হবে।

(৪) একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত লম্বগুলো একতলীয়।



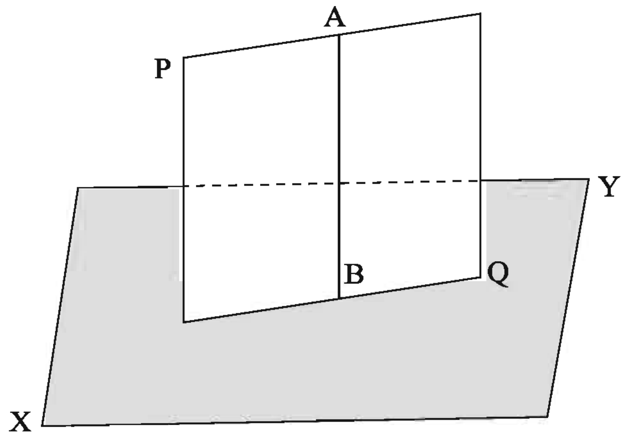
OA, OB, OC সরলরেখাত্রয় প্রত্যেকেই PO সরলরেখার O বিন্দুতে PO এর উপর লম্ব হলে তারা সকলেই একই XY সমতলে অবস্থিত থাকবে।

(৫) দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার একটি কোনো সমতলের উপর লম্ব হলে অপরটিও ঐ সমতলের উপর লম্ব হবে। বিপরীতক্রমে, দুইটি সরলরেখা উভয়ে একই সমতলের উপর লম্ব হলে, তারা সমান্তরাল হবে।



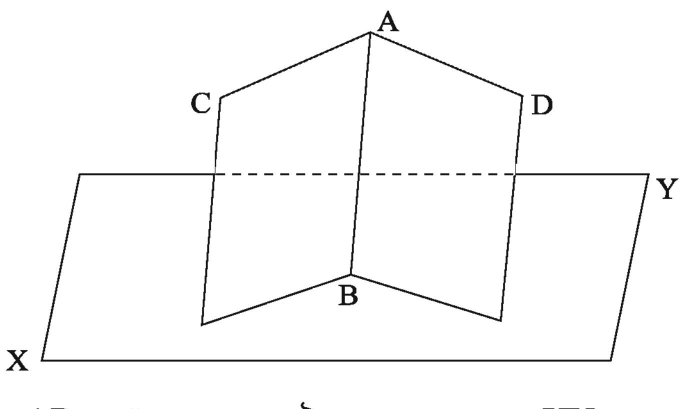
AB ও CD দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা। AB সরলরেখাটি কোনো XY সমতলের উপর লম্ব হলে, CD ও ঐ তলের উপর লম্ব হবে। বিপরীতক্রমে, AB ও CD সরলরেখাদ্বয় উভয়ে একই XY সমতলের উপর লম্ব হলে, তারা সমান্তরাল হবে।

(৬) কোনো সরলরেখা একটি নির্দিষ্ট সমতলের উপর লম্ব হলে ঐ লম্বের ভিতর দিয়ে অঙ্কিত যেকোনো সমতল ঐ নির্দিষ্ট সমতলের উপর লম্ব হবে।



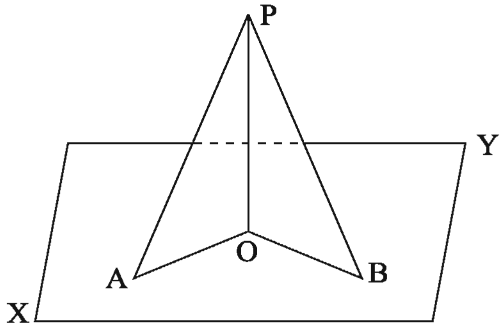
AB সরলরেখাটি XY সমতলের উপর লম্ব হলে AB এর ভিতর দিয়ে অঙ্কিত যেকোনো PQ সমতল XY সমতলের উপর লম্ব হবে।

৭) দুইটি পরস্পরছেদী সমতল কোনো তৃতীয় সমতলের উপর লম্ব হলে তাদের ছেদরেখাও ঐ সমতলের উপর লম্ব হবে।



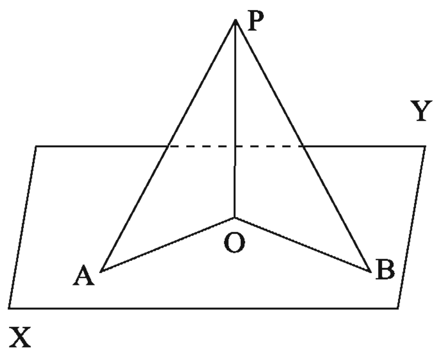
CB ও DB সমতলদ্বয় AB রেখায় ছেদ করে। ঐ সমতলদ্বয় প্রত্যেকে XY সমতলের উপর লম্ব হলে তাদের ছেদরেখা AB ও XY সমতলের উপর লম্ব হবে।

(৮) কোনো সমতলের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত সকল সরলরেখার মধ্যে লম্বটির দৈর্ঘ্যই ক্ষুদ্রতর হবে।



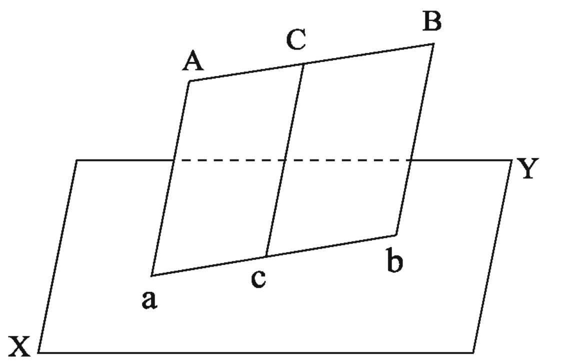
XY সমতলের বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে ঐ তলের উপর অঙ্কিত লম্ব PO ঐ সমতলকে O বিন্দুতে ছেদ করে আবার P বিন্দু থেকে যেকোনো PA, PB তির্যক রেখাদ্বয় সমতলকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে, PO এর দৈর্ঘ্য PA বা PB এর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হবে। তির্যক আরো অনেক রেখাংশ P থেকে টেনে সমতলের বিভিন্ন বিন্দু, উহারা O এর যতই নিকটবর্তী হোক না কেন, যুক্ত করে প্রমাণ করা সম্ভব যেকোনো রেখাই OP এর চেয়ে ছোট হতে পারবে না। তাই, OP-ই ক্ষুদ্রতম।

(৯) কোনো সমতলের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত তির্যক রেখাগুলোর মধ্যে যেগুলো ঐ বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু থেকে সমান দূরত্বে ছেদ করে তারা পরস্পর সমান।



XY সমতলের বহিঃস্থ P বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু O এবং একই P বিন্দু থেকে অঙ্কিত তির্যকরেখাদ্বয় PA এবং PB। যদি OA এবং OB সমান হয় তবে PA ও PB সমান হবে।

(১০) কোনো নির্দিষ্ট সমতলের উপর একটি সরলরেখার অভিক্ষেপও একটি সরলরেখা।



AB সরলরেখার A, C, B বিন্দু থেকে XY সমতলের উপর Aa, Bb, Cc লম্বত্রয় অঙ্কন করা হয়েছে। তাহলে a, c, b, বিন্দুত্রয় সমরেখ হবে। অর্থাৎ XY সমতলের উপর ACB সরলরেখার অভিক্ষেপ abc-ও একটি সরলরেখা হবে।

অনুশীলনী-৭.১

১। জাগতিক কোনো বিন্দুর মধ্য দিয়ে কতগুলো (ক) সরলরেখা (খ) সমতল অঙ্কন করা যায়?

২। জাগতিক কোনো সরলরেখার মধ্য দিয়ে কতগুলো সমতল অঙ্কন করা যায়?

৩। কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার সাথে সমান্তরাল কতগুলো (ক) সরলরেখা (খ) সমতল অঙ্কন করা যায়?

৪। কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব কতগুলো (ক) সরলরেখা (খ) সমতল অঙ্কন করা যায়?

৫। কোনো নির্দিষ্ট তলের সাথে (ক) সমান্তরাল (খ) লম্ব কতগুলো (১) সরলরেখা (২) সমতল অঙ্কন করা যায়?

৬। একটি সরলরেখা একটি সমতলের সাথে কখন (ক) সমান্তরাল (খ) লম্ব হবে?

৭। একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়ে এবং একটি নির্দিষ্ট (ক) সরলরেখার সমান্তরাল এবং একটি নির্দিষ্ট সমতলের (খ) সমান্তরাল (গ) উপর লম্ব কতগুলো সরলরেখা অঙ্কন করা যায়?

৮। দুইটি নির্দিষ্ট নৈকতলীয় রেখাকে ছেদ করে এরূপ কতগুলো সরলরেখা অঙ্কন করা যায়?

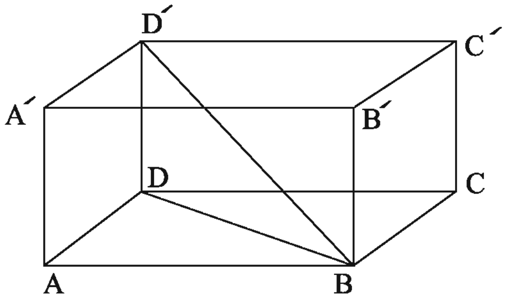
ঘনবস্তুর পরিমিতি

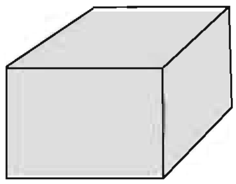
৭.৮ । ঘনবস্তু

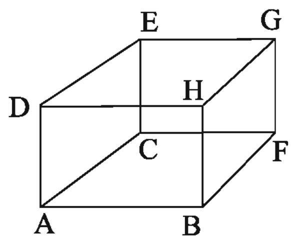
আমরা জানি, একখানা বই বা একখানা ইট বা একটি বাক্স বা একটি গোলাকার বল সবই ঘনবস্তু এবং তারা প্রত্যেকেই কিছু পরিমাণ স্থান (Space) দখল করে থাকে।
সমতল অথবা বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত শূন্যের কিছুটা স্থান দখল করে থাকে এরূপ বস্তুকে ঘনবস্তু (Solid) বলা হয়। সমতলস্থ কোনো স্থানকে বেষ্টন করতে হলে যেমন, অন্তত তিনটি সরলরেখা দরকার তেমনি জাগতিক কোনো স্থানকে বেষ্টন করতে হলে অন্তত চারটি সমতল দরকার। এই তলগুলো ঘনবস্তুর তল বা পৃষ্ঠতল (Surface) এবং এদের দুইটি সমতল যে রেখায় ছেদ করে, তাকে ঐ ঘনবস্তুর ধার (edge) বলা হয়।
একটি বাক্সের বা একখান ইটের ছয়টি পৃষ্ঠতল আছে এবং বারটি ধার আছে। একটি ক্রিকেট বল একটি বক্রতল দ্বারা আবদ্ধ।

৭.৯ । সুষম ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল

১। আয়তিক ঘন বা আয়তাকার ঘনবস্তু (Rectangular Parallelopiped)





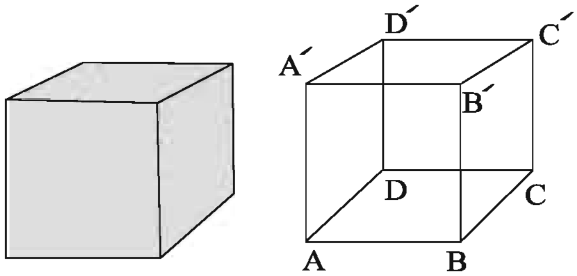


তিনজোড়া সমান্তরাল সমতল দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে সামান্তরিক ঘনবস্তু বলা হয়। এই ছয়টি সমতলের প্রত্যেকটি একটি সামান্তরিক এবং বিপরীত পৃষ্ঠগুলো সর্বতোভাবে সমান। সামান্তরিক ঘনবস্তুর তিনটি দলে বিভক্ত বারটি ধার আছে।

যে সামান্তরিক ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলগুলো আয়তক্ষেত্র, তাকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলা হয়। যে আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলগুলো বর্গক্ষেত্র, তাকে ঘনক (cube) বলা হয়। উপরোক্ত চিত্রে আয়তাকার ঘনবস্তুর এবং ঘনকের পৃষ্ঠগুলো $ABCD$, $A'B'C'D'$, $BCC'B'$, $ADD'A'$, $ABB'A'$, $DCC'D'$ এবং ধারগুলো AB, CD, $A'B'$, $C'D'$, BC, $B'C'$, AD, $A'D'$, AA', BB', CC', DD' এবং একটি কর্ণ BD'.
মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $AB = a$ একক, $AD = b$ একক এবং $AA' = c$ একক।

(ক) আয়তাকার ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (Area of the whole surface)
= ছয়টি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি
= 2($ABCD$, $ABB'A'$ ও $ADD'A'$ পৃষ্ঠসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি)
$= 2(ab + ac + bc)$ বর্গএকক
$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গএকক
(খ) আয়তন (Volume) $= AB' \times AD' \times AA'$ ঘনএকক $= abc$ ঘনএকক

(গ) কর্ণ $BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2 + DD'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক



২। ঘনকের ক্ষেত্রে, $a = b = c$

$\therefore$ (ক) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2$ বর্গএকক

(খ) আয়তন $= a^3$ ঘনএকক

(গ) কর্ণ $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ একক।

উদাহরণ ১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 4 ঃ 3 ঃ 2 এবং তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 468 বর্গমিটার হলে, তার কর্ণ ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $4x, 3x, 2x$ মিটার।

তাহলে, $2(4x.3x + 3x.2x + 2x.4x) = 468$

বা, $52x^2 = 468$ বা, $x^2 = 9 \quad \therefore x = 3$

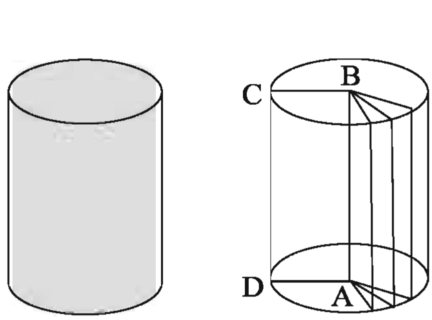
$\therefore$ ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 12 মি., প্রস্থ 9 মি., এবং উচ্চতা 6 মি.

$\therefore$ কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{12^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{144 + 81 + 36} = \sqrt{261}$ মিটার 16.16 মি. (প্রায়) এবং আয়তন $= 12 \times 9 \times 6 = 648$ ঘনমিটার।

৩। সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার (Right Circular Cylinder)

কোনো আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে A ধরে ঐ বাহুর চতুর্দিকে আয়তক্ষেত্রটিকে পূর্ণ একপাক ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার বা বেলন বলা হয়।

পাশের চিত্রে, ABCD সিলিন্ডারের অক্ষ AB, উচ্চতা বা দৈর্ঘ্য DC এবং বৃত্তকার ভূমির কেন্দ্র A এবং ব্যাসার্ধ AD.



সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h হলে,

(ক) বক্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি $\times$ উচ্চতা $= 2\pi rh$ বর্গ একক।

(খ) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = বক্রতল ও প্রান্ততলদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, $= 2\pi rh + 2\pi r^2$ বর্গএকক
$= 2\pi r(r + h)$ বর্গএকক।

(গ) আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $= \pi r^2 h$ ঘনএকক।

উদাহরণ ২। একটি সমবৃত্তভূমিক আবদ্ধ সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাস 7 মিটার এবং বক্রতলের ক্ষেত্র 220 বর্গমিটার হলে, ঐ সিলিন্ডারের উচ্চতা, সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : সিলিন্ডারের ভূমির ব্যাসার্ধ $= \frac{7}{2}$ মিটার = 3.5 মিটার

মনে করি, উচ্চতা = h মিটার

তাহলে বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh = 220$ বা, $2 \times \pi \times 3.5 \times h = 220$

বা, $h = \frac{220}{\pi \times 3.5 \times 2} = 10.0040$ মি.

$\therefore$ উচ্চতা = 10 মিটার (আসন্ন মান)

ভূমির ক্ষেত্রফল $\pi r^2 = \pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 34.4846$ ব. মি. (প্রায়) $\{\pi = 3.1416$ ধরে$\}$

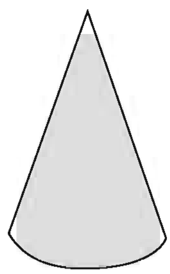
$\therefore$ সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 220 + 2 \times 34.4846 = 288.9692$ বর্গমিটার (প্রায়)।

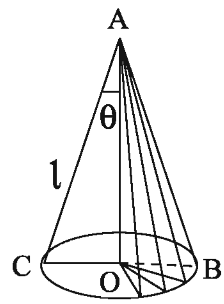
আয়তন $= \pi r^2 h = \pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 10 = 384.8451$. ঘনমিটার (প্রায়)।

$\therefore$ সমগ্র পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল = 288.969 বর্গমিটার (প্রায়), আয়তন = 384.845 ঘনমিটার (প্রায়)।

৪। সমবৃত্তভূমিক কোণক (Right circular cone)

কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহুকে A ধরে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে একবার ঘুরিয়ে আনলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক কোণক বলা হয়।

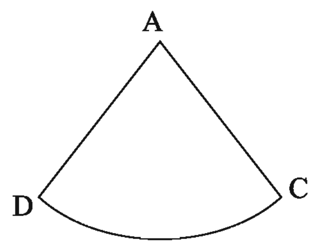




চিত্রে, OAC সমকোণী ত্রিভুজকে OA এর চতুর্দিকে ঘোরানোর ফলে ABC সমবৃত্তভূমিক কোণক উৎপন্ন হয়েছে। θ কে অর্ধশীর্ষকোণ (Semi vertical angle) বলা হয়।

কোণকের উচ্চতা OA (= h), ভূমির ব্যাসার্ধ OC (= r) এবং হেলানো উচ্চতা AC (= l) হলে

(ক) বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিধি $\times$ হেলানো উচ্চতা
$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l = \pi rl$ বর্গএকক



(খ) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমিতলের ক্ষেত্রফল
$= \pi rl + \pi r^2 = \pi r(r + l)$ বর্গএকক

(গ) আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক

উদাহরণ ৩। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 12 সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 10 সে. মি. হলে, তার হেলানো উচ্চতা, বক্রতলের ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান : ভূমির ব্যাসার্ধ $= r = \frac{10}{2} = 5$ সে. মি.

হেলানো উচ্চতা $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ সে. মি.

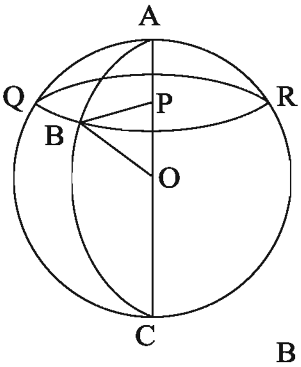
বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l = \pi x\ 5\ x\ 13 = 204.2035$ ব. সে. মি.

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r\ (l + r) = \pi \times 5\ (13 + 5) = 282.7433$ ব. সে. মি.

আয়তন $= \frac{l}{3} \pi r^2\ h = \frac{l}{3} \times \pi \times 5^2 \times 12 = 314.1593$ ঘ. সে. মি.।

৫। গোলক (Sphere)

কোনো অর্ধবৃত্ত ক্ষেত্রের ব্যাসকে অক্ষ ধরে ঐ ব্যাসের চতুর্দিকে অর্ধবৃত্ত ক্ষেত্রকে একবার ঘুরিয়ে আনলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে গোলক বলে। অর্ধবৃত্তটির কেন্দ্রই গোলকের কেন্দ্র। অর্ধবৃত্ত এই ঘূর্ণনের ফলে যে তল উৎপন্ন করে তাই হল গোলকের তল। গোলকের কেন্দ্র বলতে মূল বৃত্তের কেন্দ্রকেই বুঝায়।



CQAR গোলকের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ OA = OB = OC এবং কেন্দ্র থেকে h দূরত্বে P বিন্দুর মধ্য দিয়ে OA রেখার সাথে লম্ব হয় এরূপ একটি সমতল গোলকটিকে ছেদ করে QR বৃত্তটি উৎপন্ন করেছে। এই বৃত্তের কেন্দ্র P এবং ব্যাসার্ধ PB। তাহলে PB এবং OP পরস্পর লম্ব।

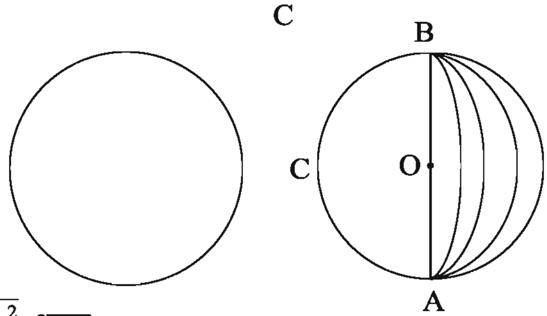
$\therefore\ OB^2 = BP^2 + OP^2$

$\therefore\ PB^2 = OB^2 - OP^2 = r^2 - h^2$

গোলকের ব্যাসার্ধ r হলে,

(ক) গোলকের তলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গএকক।

(খ) আয়তন $= \frac{4}{3} \pi r^3$ ঘন একক।



(গ) h উচ্চতায় তলচ্ছেদে উৎপন্ন বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{r^2 - h^2}$ একক।

উদাহরণ ৪। একটি আয়তাকার তাম্রপিন্ডের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 11 মিটার, 10 মিটার, 5 মিটার একে গলিয়ে 50 সে. মি. ব্যাসের কতগুলো গোলক প্রস্তুত করা যায়?

সমাধান : তাম্রপিন্ডের আয়তন $= 11 \times 10 \times 5$ ঘ. মি. $= 550$ ঘনমিটার

গোলকের ব্যাসার্ধ $= \frac{50}{2}$ সে. মি. $= 25$ সে. মি. $= \frac{1}{4}$ মিটার

$\therefore$ গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = .06545$ ঘ. মি. ($\pi = 3.1416$ ধরে)

$\therefore$ নির্ণেয় গোলক সংখ্যা $= 550 \div .06545 = 8403.36$

অর্থাৎ 8403 টি (প্রায়)।

উদাহরণ ৫। 4 সে. মি. ব্যাসের একটি লৌহ গোলককে পিটিয়ে $\frac{2}{3}$ সে. মি. পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ কত?

সমাধান : লৌহ গোলকের ব্যাসার্ধ $= \frac{4}{2} = 2$ সে. মি.

$\therefore$ তার আয়তন $= \frac{4}{3}\pi .2^3 = \frac{32}{3}\pi$ ঘন সে. মি.

মনে করি, পাতের ব্যাসার্ধ= r সে. মি. পাতটি $\frac{2}{3}$ সে. মি. পুরু।

$\therefore$ পাতের আয়তন $= \pi r^2 \times \frac{2}{3}$ ঘ. সে. মি. $= \frac{2}{3}\pi r^2$ ঘ. সে. মি.

শর্তানুসারে, $\frac{2}{3}\pi r^2 = \frac{32}{3}\pi$ বা, $r^2 = 16$ বা, $r = 4$

$\therefore$ পাতের ব্যাসার্ধ $= 4$ সে. মি.

উদাহরণ ৬। সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক, একটি অর্ধ গোলক ও একটি সিলিন্ডার সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত। দেখাও যে, তাদের আয়তনের অনুপাত 1 : 2 : 3

সমাধান : মনে করি, সাধারণ উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে h এবং r একক। যেহেতু অর্ধ গোলকের উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ সমান। $\therefore h = r$

তাহলে কোণকের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3$ ঘন একক

অর্ধ গোলকের আয়তন $\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$ ঘন একক

সিলিন্ডারের আয়তন $= \pi r^2 h = \pi r^3$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $\frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3$

$$= \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1 = 1 : 2 : 3.$$

উদাহরণ ৭। একটি আয়তাকার লৌহ ফলকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 10, 8 ও $5\frac{1}{2}$ সে. মি.।

এই ফলকটিকে গলিয়ে $\frac{1}{2}$ সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কতগুলো গোলাকার গুলি প্রস্তুত করা যাবে?

সমাধান : লৌহ ফলকের আয়তন $= 10 \times 8 \times 5\frac{1}{2}$ ঘ. সে. মি. $= 440$ ঘ. সে. মি.

মনে করি, নির্ণেয় গুলির সংখ্যা $= n$

$\therefore$ n সংখ্যক গুলির আয়তন $= n \times \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ঘ. সে. মি.

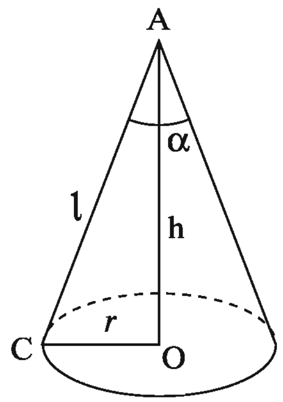
প্রশ্নানুসারে, $n \times \frac{4\pi}{24} = 440$

$\therefore\ n = \dfrac{440 \times 24}{4\pi} = \dfrac{440 \times 24}{4 \times \pi} = 840.33$ অর্থাৎ, 840 টি।

উদাহরণ ৮। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের আয়তন V, বক্রতলের ক্ষেত্রফল S, ভূমির ব্যাসার্ধ r, উচ্চতা h এবং অর্ধ শীর্ষকোণ α হলে দেখাও যে,

(i) $S = \dfrac{\pi h^2 \tan\alpha}{\text{Cos}\alpha} = \dfrac{\pi r^2}{\sin\alpha}$ বর্গ একক

(ii) $V = \dfrac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha = \dfrac{\pi r^3}{3\tan\alpha}$ ঘন একক



সমাধান : পাশের চিত্রে, কোণকের উচ্চতা OA (= h) , হেলানো উচ্চতা AC (= l), ভূমির ব্যাসার্ধ OC (= r), অর্ধ শীর্ষকোণ $\angle OAC\ (= \alpha)$

$\therefore\ l = \sqrt{h^2 + r^2}$ এবং $r = h\tan\alpha$.

এখন (i) $S = \pi r l = \pi r\sqrt{h^2 + h^2\tan^2\alpha} = \pi r h \sec\alpha.$

$$= \pi(h\tan\alpha)(h\sec\alpha) = \frac{\pi h^2 \tan\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \pi\left(\frac{r}{\tan\alpha}\right)^2 \frac{\tan\alpha}{\cos\alpha},\ [\ \therefore\ h = \frac{r}{\tan\alpha}\ ]$$

$$= \frac{\pi r^2}{\sin\alpha}$$ বর্গ একক।

(ii) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(h\tan\alpha)^2 h = \dfrac{1}{3}\pi h^3\tan^2\alpha$

$= \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{r}{\tan\alpha}\right)^3 \tan^2\alpha = \dfrac{1}{3}\pi\ \dfrac{r^3}{\tan\alpha}$ ঘন একক।

দ্রষ্টব্য : এই উদাহরণে (মাধ্যমিক জ্যামিতিতে পঠিত) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের ব্যবহার করা হয়েছে।

অনুশীলনী- ৭.২

(ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যাবে। প্রয়োজনে $\pi = 3.1416$ ধরতে হবে।)

১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 মি., 12 মি. ও 4.5 মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন নির্ণয় কর।

২। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল 198 বর্গমিটার এবং এর মাত্রাগুলোর অনুপাত 3 ঃ 2 ঃ 1 হলে এর আয়তন ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩। ভূমির উপর অবস্থিত 2.5 মি. দৈর্ঘ্য ও 1.0 মি. প্রস্থবিশিষ্ট (অভ্যন্তরীণ পরিমাপ) একটি আয়তাকার জলাধারের উচ্চতা 4 মিটার হলে, এর আয়তন এবং অভ্যন্তরীণ তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৪। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর মাত্রাগুলো 5 সে. মি., 4 সে. মি., 3 সে. মি. হলে, এর কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫। 70 জন ছাত্রের জন্য এরূপ একটি হোস্টেল নির্মাণ করতে হবে যাতে প্রত্যেক ছাত্রের জন্য 4.25 বর্গমিটার মেঝে ও 13.6 ঘনমিটার শূন্যস্থান থাকে। হোস্টেলটি 34 মিটার লম্বা হলে, এর প্রস্থ ও উচ্চতা কত হবে?

৬। কোনো ঘনকের পৃষ্ঠতলের কর্ণের দৈর্ঘ্য $8\sqrt{2}$ সে.মি. হলে, এর কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন নির্ণয় কর।

৭। উভয় প্রান্ত বন্ধ একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের বক্রতল 2200 বর্গ সে.মি.। এর উচ্চতা 25 সে.মি. হলে, সমগ্রতল নির্ণয় কর।

৮। একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের তলের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং এর আয়তন 150 ঘন সে.মি.। এর ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

৯। কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10 সে. মি. ও প্রস্থ 3 সে. মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হবে তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১০। 21 সে. মি. দৈর্ঘ্য, 12 সে. মি. প্রস্থ ও 11 সে. মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি আয়তাকার তাম্রপিড গলিয়ে .7 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি কঠিন সুষম তারে পরিণত করা হল। তারটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১১। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 8 সে. মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 সে. মি. হলে, সমগ্রতল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১২। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 24 সে. মি. এবং আয়তন 1232 ঘন সে. মি.। এর হেলানো উচ্চতা কত?

১৩। কোনো সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে. মি. এবং 3.5 সে. মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তার আয়তন নির্ণয় কর।

১৪। 6 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১৫। 6, 8, r সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি কঠিন কাচের বল গলিয়ে 9 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি কঠিন গোলকে পরিণত করা হল। r এর মান নির্ণয় কর।

১৬। একটি ফাঁপা লোহার গোলকের বাইরের ব্যাস 13 সে. মি. এবং লোহার বেধ 2 সে. মি.। ঐ গোলকে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হল। তার ব্যাস কত হবে?

১৭। 4 সে. মি. ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 5 সে. মি. বহির্ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ও সমভাবে পুরু একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হল। দ্বিতীয় গোলকটি কত পুরু ?

১৮। একটি লোহার নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 6 সে. মি.। এর লোহা থেকে 8 সে. মি. দৈর্ঘ্য ও 6 সে. মি. ব্যাসের কয়টি নিরেট সিলিন্ডার প্রস্তুত করা যাবে?

১৯। 3 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি ধাতব কঠিন গোলককে গলিয়ে 3 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তভূমিক সিলিন্ডার আকৃতির দণ্ডে পরিণত করা হল। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২০। 44 সে. মি. পরিধি বিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন নির্ণয় কর।

২১। একটি গোলক আকৃতির বল একটি সিলিন্ডার আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন $89\frac{5}{8}$ ঘন সে. মি. হলে, বলটির পরিধি কত?

২২। 13 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের কেন্দ্র থেকে 12 সে. মি. দূরবর্তী কোনো বিন্দুর মধ্য দিয়ে ব্যাসের উপর লম্ব সমতল গোলকটিকে ছেদ করে। উৎপন্ন তলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২৩। একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্সের বাইরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 1.6, 1.2, 0.8 মিটার এবং এর কাঠ 3 সে. মি. পুরু। বাক্সটির ভিতরের তলের ক্ষেত্রফল কত? প্রতি বর্গমিটার 14.44 টাকা হিসাবে বাক্সের ভিতরটি রং করতে কত খরচ হবে?

২৪। 120 মিটার দৈর্ঘ্য ও 90 মি. প্রস্থ (বহির্মাপ) বিশিষ্ট আয়তাকার বাগানের চতুর্দিকে 2 মি. উচ্চ ও 25 সে. মি. পুরু প্রাচীর নির্মাণ করতে 25 সে. মি. দৈর্ঘ্য, 12.5 সে.মি. প্রস্থ এবং 0.8 সে. মি. বেধবিশিষ্ট কতগুলো ইট লাগবে?

২৫। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 ঃ 3 এবং এর আয়তন 2304 ঘন সে. মি.। প্রতি বর্গসেন্টিমিটারে 10 পয়সা হিসেবে ঐ বস্তুর তলায় সীসার প্রলেপ দিতে 19.20 টাকা খরচ হলে, ঐ বস্তুর মাত্রাগুলো নির্ণয় কর।

২৬। কোণক আকারের একটি তাঁবুর উচ্চতা 7.50 মিটার। এই তাঁবু দ্বারা 2000 বর্গমিটার জমি ঘিরতে চাইলে কি পরিমাণ ক্যানভাস লাগবে?

২৭। 17.5 সে. মি. ব্যাসের চারটি বৃত্তভূমিক সিলিন্ডারাকারের ঢালাই পিলারের চতুর্দিকে 3.5 সে. মি. পুরু প্লাস্টার করার জন্য 3 ঃ 1 অনুপাতে বালি ও সিমেন্ট মিশিয়ে মশলা তৈরি করতে হয়। প্রতিটি পিলার তিন মিটার উঁচু হলে, কি পরিমাণ বালি লাগবে?

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 6 সে.মি., 3 সে.মি. এবং 6 সে.মি. । ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য কত সে.মি. ?

ক. $6\sqrt{2}$ খ. $6\sqrt{3}$

গ. 8 ঘ. 9

২। 512 সি.সি. আয়তনের একটি গোলক হতে আটটি সমআয়তনের ঘনক তৈরি করা হলে প্রতিটি ঘনকের ধার কত সে.মি. হবে?

ক. 2 খ. 4

গ. 6 ঘ. 8

৩। সমবৃত্তভূমিক এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট একটি কোণক ও একটি সিলিন্ডারের আয়তনের অনুপাত নিম্নের কোনটি?

ক. 1 ঃ 2 খ. 2 ঃ 1

গ. 1 ঃ 3 ঘ. 3 ঃ 1

নিম্নের তথ্যের ভিত্তিতে ৪ - ৬ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :

2 সে.মি. ধারবিশিষ্ট তিনটি ঘনককে পাশাপাশি রেখে একটি আয়তাকার ঘনবস্তু পাওয়া গেল।

৪। আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন কত সি.সি.?

ক. 4 খ. 12

গ. 18 ঘ. 24

৫। প্রতিটি ঘনকের কর্ণের দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি ?

ক. $2\sqrt{3}$ সে.মি. খ. $3\sqrt{2}$ সে.মি.

গ. $2\sqrt{6}$ সে.মি. ঘ. $2\sqrt{2}$ সে.মি.

৬। আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণ কত সে. মি. ?

ক. $6\sqrt{3}$ খ. $2\sqrt{11}$

গ. $6\sqrt{2}$ ঘ. $3\sqrt{6}$

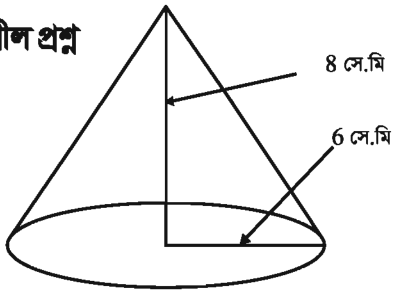
৭। একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে একটি নিরেট গোলক ঠিকভাবে এঁটে যায়।
বাক্সের ফাঁকা অংশের আয়তন হবে কোনটি?

ক. $\frac{\pi}{6}$ খ. $\frac{\pi}{3}$

গ. $\frac{3}{\pi}$ ঘ. $\frac{6}{\pi}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১।



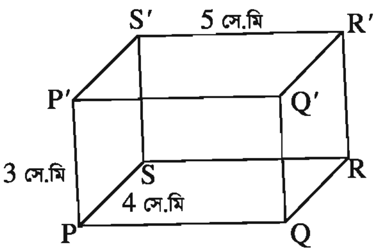
একটি সমবৃত্তভূমিক তাঁবুর চিত্র দেওয়া হল-

ক. তাঁবুটির হেলানো তলের উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ. তাঁবুটি স্থাপন করতে কত বর্গমিটার জায়গা প্রয়োজন হবে? তাঁবুটির আয়তন নির্ণয় কর।

গ. তাঁবুটি বানাতে কী পরিমাণ ক্যানভাস লাগবে? প্রতি বর্গ মি. ক্যানভাসের মূল্য 100 টাকা হলে তাঁবুটি বানাতে কত টাকা খরচ হবে?

২।



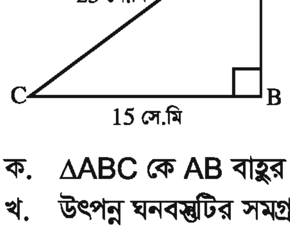
একটি ধাতব ঘনবস্তুর চিত্র দেওয়া হল।

ক. চিত্রমতে, ঘনবস্তুটির ভূ-তল কোনটি? ভূ-তলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. ঘনবস্তুটির কর্ণের দৈর্ঘ্যের সমান ধারবিশিষ্ট একটি ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ. ঘনকটি গলিয়ে 1.5 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কতটি ফাঁপা গোলক তৈরি করা যাবে তা নিকটতম পূর্ণ সংখ্যায় প্রকাশ কর (প্রতিটি ফাঁকা গোলকের পুরুত্ব = 0.5 সে.মি.)

৩। চিত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ



ক. ΔABC কে AB বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে উৎপন্ন বস্তুটি কী? ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. উৎপন্ন ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

গ. sinC নির্ণয় কর এবং প্রমাণ কর যে, $\frac{\tan C - \tan A}{1 + \tan C . \tan A} = \frac{7}{27}$

অষ্টম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতি

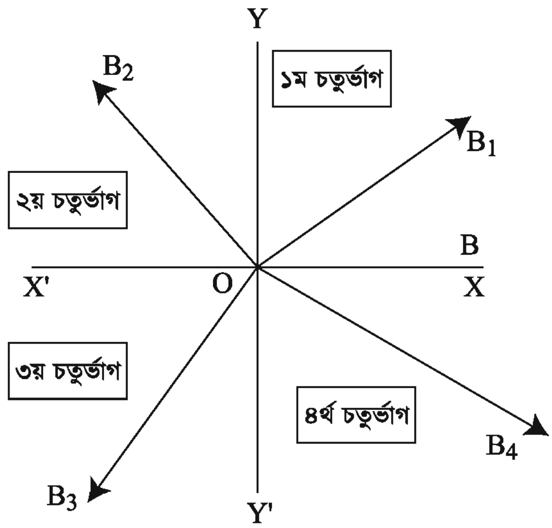
৮.১। ভূমিকা

'ত্রিকোণ' শব্দটি দ্বারা তিনটি কোণ বোঝায় আর 'মিতি' অর্থে পরিমাণ বোঝায়। Trigon গ্রিক শব্দটির অর্থ তিনটি কোণ বা ত্রিভুজ এবং 'metry' শব্দের অর্থ পরিমাপ। ইংরেজিতে ত্রিকোণমিতিকে Trigonometry বলা হয়। ব্যবহারিক প্রয়োজনে ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাণ এবং তাদের সাথে সম্পর্কিত বিষয়ের আলোচনা থেকেই ত্রিকোণমিতির সূত্রপাত হয়। গণিতের একটি বিশেষ শাখা হিসেবে ত্রিকোণমিতির আলোচ্য বিষয় ব্যাপকভাবে বিস্তৃত হয়েছে।

ত্রিকোণমিতিকে দুইটি শাখায় বিভক্ত করা যায়। একটি সমতলীয় ত্রিকোণমিতি (Plane Trigonometry) এবং গোলকীয় ত্রিকোণমিতি (Spherical Trigonometry)। আমাদের বর্তমান আলোচনা কেবলমাত্র সমতলীয় ত্রিকোণমিতির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

৮.২। জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণ

XOX' এবং YOY' রেখাদ্বয় O বিন্দুতে সমকোণে ছেদ করে যে চারটি সমকোণ উৎপন্ন করেছে তাদের প্রত্যেকটির অভ্যন্তরকে একটি চতুর্ভাগ (quadrant) বলা হয়। OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরতে থাকলে প্রথম সমকোণের অভ্যন্তর প্রথম চতুর্ভাগ এবং দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ সমকোণের অভ্যন্তরগুলোকে যথাক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ বলে।



জ্যামিতির প্রাথমিক ধারণা অনুসারে একই প্রান্তবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন রশ্মি একটি কোণ উৎপন্ন করে। ত্রিকোণমিতিতে একটি স্থির রশ্মির পরিপ্রেক্ষিতে অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মির বিভিন্ন অবস্থানে বিভিন্ন কোণ বিবেচনা করা হয়। মনে করি, OB ঘূর্ণায়মান রশ্মি শুরুতে OX স্থির রশ্মির অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘোরে তার বিপরীত (anti-clockwise) দিকে ঘুরছে। OB রশ্মি প্রথমে XOB_1 সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে প্রথম চতুর্ভাগে থাকে এবং পরে যখন OX এর সাথে লম্বভাবে OY অবস্থানে আসে তখন XOY কোণের পরিমাণ 90^0 বা এক সমকোণ হয়। OB রশ্মিটি আরও কিছু ঘুরে যখন দ্বিতীয় চৌকণে OB_2 অবস্থানে থাকে, তখন উৎপন্ন XOB_2 কোণটি স্থূলকোণ। একইভাবে ঘুরে যখন OB রশ্মি OX এর ঠিক বিপরীত দিকে একই সরলরেখায় OX' অবস্থানে থাকে, তখন উৎপন্ন কোণ XOX' একটি সরলকোণ যার পরিমাণ 180^0 বা দুই সমকোণ।

জ্যামিতিতে কোণের আলোচনা দুই সরলকোণ পর্যন্ত সীমিত রাখা হয় এবং এরূপ জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে কোনো পার্থক্য নেই। কিন্তু যদি মনে করা যায় যে, OB রশ্মিটি সম্পূর্ণরূপে একবার অপেক্ষা কিছু বেশি ঘুরে আবার OB_1 অবস্থানে গেল, তখন উৎপন্ন XOB_1 কোণের পরিমাণ চার সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। এরূপ ঘূর্ণনের ফলে ত্রিকোণমিতিতে আরও বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন হতে পারে। কিন্তু সমতল জ্যামিতিতে চার সমকোণের বেশি ধারণা করা যায় না।

OB রশ্মির আদি অবস্থানে XOX' কোণকে জ্যামিতিতে কোণ বলে গণ্য করা হয় না, কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে উক্ত কোণের পরিমাণ শূন্য ধরা হয়।

৮.৩। ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ

উপরোক্ত আলোচনায় OB রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে ঘোরানো হয়েছে। কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘোরানোর ফলে উৎপন্ন কোণকে ধনাত্মক (positive) কোণ বলা হয়। আবার কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘোরানোর ফলে উৎপন্ন কোণকে ঋণাত্মক (negative) কোণ বলা হয়।

উপরের আলোচনা থেকে এটা স্পষ্ট যে, একটি ধনাত্মক কোণের পরিমাণ 90^0 অপেক্ষা কম, অথবা 360^0 অপেক্ষা বেশি কিন্তু 450^0 অপেক্ষা কম হলে, উক্ত কোণ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে। পূর্বোক্ত চিত্রে BOB_1 কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে, BOB_2 কোণটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে, BOB_3 কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে, BOB_4 কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

উদাহরণ ১। (i) 1240^0 (ii) -2130^0 কোণদ্বয় কোণ চতুর্ভাগে আছে, নির্ণয় কর।

সমাধান : (i) $1240^0 = (13 \times 90^0 + 70^0) = 3 \times 4 \times 90^0 + 90^0 + 70^0$

1240^0 কোণটি ধনাত্মক কোণ এবং 13 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 14 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। সুতরাং কোণটি উৎপন্ন করতে 12 সমকোণ বা তিনবার ঘোরার পর আরও এক সমকোণ ঘোরার পর দ্বিতীয় চতুর্ভাগে 70^0 ঘুরতে হবে। 1240^0 কোণটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

(ii) $-2130^0 = -23 \times 90^0 - 60^0$

2130^0 একটি ঋণাত্মক কোণ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে 23 সমকোণ ও একই দিকে 60^0 ঘুরলে -2130^0 পরিমাণ কোণ উৎপন্ন হবে।

$\therefore$ -2130^0 কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

৮.৪। কোণ পরিমাপের একক

কোনো কোণের মান বা পরিমাণ বর্ণনায় সাধারণত দুই প্রকারের একক পদ্ধতি ব্যবহৃত হয় :

(১) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal system) ও

(২) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular system)।

(১) ষাটমূলক পদ্ধতি : সমকোণ একটি ধ্রুব কোণ। ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। এক সমকোণকে সমান 90 ভাগে বিভক্ত করলে প্রতি অংশের পরিমাপ এক ডিগ্রি (degree) হয়। এক ডিগ্রিকে সমান 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক মিনিট (minute) এবং এক মিনিটকে সমান ৬০ ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক সেকেন্ড (second) বলা হয়।

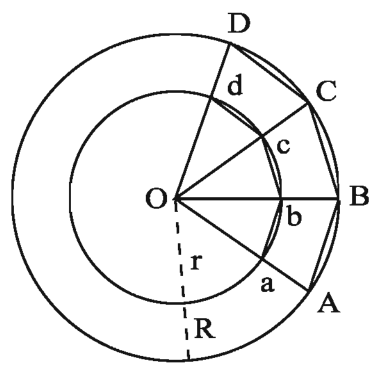
60" সেকেন্ড = 1' মিনিট
60' মিনিট = 1^0 ডিগ্রি
90^0 ডিগ্রি = 1 সমকোণ।

(২) বৃত্তীয় পদ্ধতি : বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ান (Radian) কোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়।

সংজ্ঞা : কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাকেই এক রেডিয়ান কোণ বলা হয়।

প্রতিজ্ঞা : (১) **যেকোনো** দুইটি বৃত্তের স্ব-স্ব পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সমান।

প্রমাণ : আমরা ধরে নিতে পারি যে, বৃত্ত দুইটি সমকেন্দ্রিক। মনে করি, $n>1$ একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। বৃহত্তর বৃত্তটিকে n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করি। কেন্দ্রের সাথে বিভক্তি বিন্দুগুলো যোগ করে ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে n সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করা হয়। উভয় বৃত্তে বিভক্ত বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি। ফলে প্রত্যেক বৃত্তে n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত হল (বৃহত্তর বৃত্তে ABCD... ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তে abcd...)। বৃহত্তর বৃত্তের পরিধিকে P ও ব্যাসার্ধকে R এবং ক্ষুদ্রতম বৃত্তের পরিধিকে p ও ব্যাসার্ধকে r দ্বারা সূচিত করি।



এখন, OAB ও Oab ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

কেননা $\angle AOB = \angle aOb$ (উভয়ের সাধারণ কোণ)

এবং উভয়ে সমদ্বিবাহু বলে ভূমি সংলগ্ন কোণগুলি সমান।

$$\therefore \ \frac{AB}{ab} = \frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{R}{r}$$

অনুরূপে $\frac{BC}{bc} = \frac{R}{r} = \frac{CD}{cd} = \frac{R}{r}$ ইত্যাদি।

$$\therefore \ \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{R}{r}$$

$$\therefore \ \frac{AB + BC + CD + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{ab + bc + cd + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{2R}{2r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

n যথেষ্ট বড় হলে AB, BC, CD .... রেখাংশগুলো খুব ছোট হবে এবং মনে হবে সবাই বৃত্তের ছোট ছোট চাপ।

সুতরাং এক্ষেত্রে AB + BC + CD + ... = বৃহত্তর বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য = P
এবং ab + bc + cd + ... = ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য = p

$$\therefore \ (1) \text{ হতে } \frac{P}{p} = \frac{2R}{2r} \Rightarrow \frac{P}{2R} = \frac{p}{2r}.$$

$\therefore$ যেকোনো দুইটি বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য ও ব্যাসের দৈর্ঘ্যের অনুপাত একই।

মন্তব্য ১। যেকোনো দুইটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সর্বদা একই। অন্য কথায়, যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত বৃত্ত নির্বিশেষে একই ধ্রুব সংখ্যা। এই ধ্রুব সংখ্যাটিকে গ্রিক অক্ষর π (পাই) দ্বারা সূচিত করা হয়। এটি একটি অমূলদ সংখ্যা, অর্থাৎ π কে দশমিকে প্রকাশ করলে এর মান একটি অন্তহীন পৌনঃপুনিক রাশি হয়। π কে কোনো ক্রমেই দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত আকারে প্রকাশ করা যায় না। π এর মূলদ আসন্ন মান হিসেবে $\frac{22}{7}$ বা 3.1416 সচরাচর ব্যবহৃত হয়।

মন্তব্য ২। চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান 3.1416. আমরা সব কাজে এই মানটি ব্যবহার করবো। সম্প্রতি ইলেকট্রনিক কমপিউটারের সাহায্যে π এর মান সহস্র লক্ষাধিক দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণীত হয়েছে। π এর যেকোনো আসন্ন মান ব্যবহার করে প্রাপ্ত উত্তরও আসন্ন। এজন্য উত্তরের পাশে 'প্রায়' লেখা কর্তব্য।

অনুসিদ্ধান্ত : যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$ এর পরিধি $= 2\pi r$;

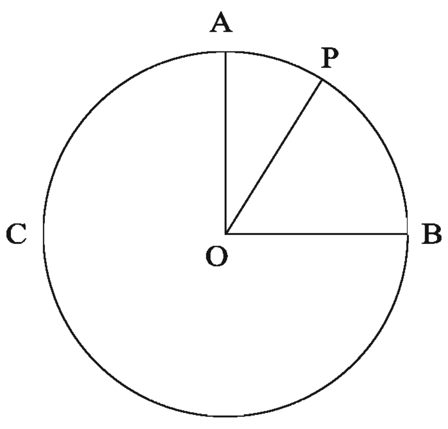
কেননা, পরিধি $= \pi \times$ ব্যাস

$= \pi \times 2r$

$= 2\pi r.$

প্রতিজ্ঞা : (২) বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

প্রতিজ্ঞা : (৩) রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ।



প্রমাণ : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্ত $\angle POB$ একটি রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POB$ একটি ধ্রুব কোণ।

OB রেখাংশের উপর O বিন্দুতে OA লম্ব আঁকি; OA পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, চাপ AB = পরিধির এক-চতুর্থাংশ

$$= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{\pi r}{2}$$

এবং চাপ PB = r (ব্যাসার্ধ)।

এখন, প্রতিজ্ঞা 2 থেকে পাই,

$$\frac{\angle POB}{\angle AOB} = \frac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB}$$

অতএব $\angle POB = \frac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB} \times \angle AOB$

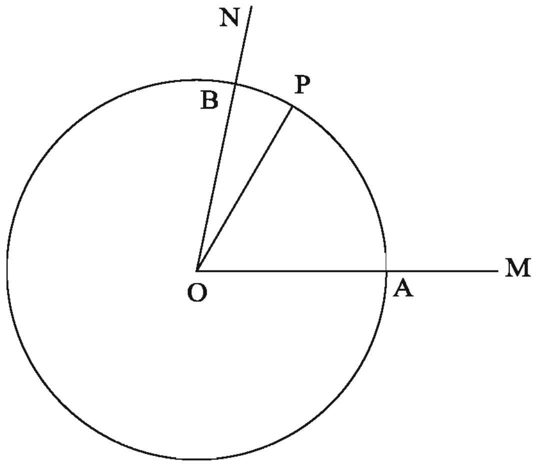
$$= \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times 1 \text{ সমকোণ} = \frac{2}{\pi} \text{ সমকোণ}$$

যেহেতু π এবং সমকোণ উভয়ই ধ্রুবক, সেহেতু রেডিয়ান কোণ $\angle POB$ একটি ধ্রুব কোণ।

অনুসিদ্ধান্ত : যেকোনো দুইটি বৃত্তের যেকোন দুইটি রেডিয়ান কোণ পরস্পর সমান।

৮.৫। কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ

বৃত্তীয় একক অর্থাৎ রেডিয়ান এককে **কোনো** কোণের পরিমাপকে তার বৃত্তীয় পরিমাপ **(circular measure)** বলা হয়।



মনে করি, MON যেকোনো একটি কোণ যার বৃত্তীয় মান নির্ণয় করতে হবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে যেকোনো $OA = r$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। ঐ বৃত্ত OM ও ON কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$। বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এর সমান করে AP চাপ নিই (যেন চাপ ও ব্যাসার্ধ একই এককে মাপা হয়)।

মনে করি, চাপ $AB = s$

তাহলে সংজ্ঞানুসারে, $\angle AOP = 1$ রেডিয়ান।

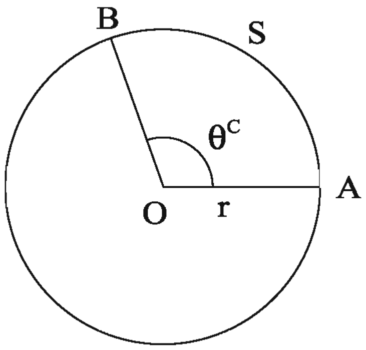
এখন $\frac{\angle MON}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{ব্যাসার্ধ } OA}$, প্রতিজ্ঞা ২ অনুযায়ী

$$\therefore \angle MON = \frac{\text{চাপ } AB}{r} \times \angle AOP = \frac{\text{চাপ } AB}{r} \times 1 \text{ রেডিয়ান}$$

$$= \frac{\text{চাপ } AB}{r} \text{ রেডিয়ান} = \frac{s}{r} \text{ রেডিয়ান}$$

$\therefore$ $\angle MON$ এর বৃত্তীয় পরিমাপ $\frac{s}{r}$, যেখানে কোণটি তার শীর্ষবিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং r ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তে s পরিমাণ (r ও s একই দৈর্ঘ্য এককে প্রকাশিত) চাপ খণ্ডিত করে।

দ্রষ্টব্য :



$\angle AOB$ এর বৃত্তীয় পরিমাপ θ রেডিয়ান হলে একে $\angle AOB = \theta$ রেডিয়ান বা $\angle AOB = \theta^C$ লিখে প্রকাশ করা হয়। তবে প্রায়শঃই রেডিয়ান একক বা তার প্রতীক (c) উহ্য রাখা হয়। অর্থাৎ $\angle AOB = \theta$ লিখলে বুঝতে হবে যে, $\angle AOB$ এর বৃত্তীয় পরিমাপ θ. উপরের চিত্রে আমরা লক্ষ করি যে, r ব্যাসার্ধের কোনো বৃত্তে s দৈর্ঘ্যের কোনো চাপ কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ ধারণ করলে $\theta = \frac{s}{r}$ বা, $s = r\theta$

৮.৬। কোণের ডিগ্রি পরিমাপ ও রেডিয়ান পরিমাপের সম্পর্ক

রেডিয়ান কোণের বর্ণনায় আমরা দেখেছি যে,

1 রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ

অর্থাৎ $1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

$\therefore$ 1 সমকোণ $= \frac{\pi^c}{2}$

$\therefore 90^o = \frac{\pi^c}{2}$

$\therefore 1^o = \frac{\pi}{180^0}$ বা $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

এখানে আমরা লক্ষ করি যে,

(i) $90^o = 1$ সমকোণ $= \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

অর্থাৎ $180^o = 2$ সমকোণ $= \pi$ রেডিয়ান।

(ii) ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে D^o ও R^c হলে,

$$D^o = \left(D \times \frac{\pi}{180}\right)^C = R^C$$

অর্থাৎ, $D \times \frac{\pi}{180} = R$ বা, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

দ্রষ্টব্য ঃ $1^o = \frac{\pi}{180}^{C}$

$$30^o = \left(30 \times \frac{\pi}{180}\right)^C = \left(\frac{\pi}{6}\right)^C$$

$$45^o = \left(45 \times \frac{\pi}{180}\right)^C = \left(\frac{\pi}{4}\right)^C$$

$$60^o = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^C = \left(\frac{\pi}{3}\right)^C$$

$$90^o = \left(90 \times \frac{\pi}{180}\right)^C = \left(\frac{\pi}{2}\right)^C$$

$$180^o = \left(180 \times \frac{\pi}{180}\right)^C = \pi^C$$

সংক্ষেপে (রেডিয়ান প্রতীক উহ্য রেখে):

$1^o = \frac{\pi}{180}$, $30^0 = \frac{\pi}{6}$ এবং $45^0 = \frac{\pi}{4}$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য ১ : $1^o = 0.01745^C$ (আসন্ন পাঁচ দশমিক পর্যন্ত)
$1^C = 57.29578^o$ (আসন্ন পাঁচ দশমিক পর্যন্ত) $= 57^o17'44.81''$
দ্রষ্টব্য ২ : নিচের (এবং অন্যত্র) সকল উদাহরণে (প্রয়োজনে) π এর আসন্ন মান 3.1416 ব্যবহার করা হয়েছে।

উদাহরণ ২। (i) $45^0 25' 36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

(ii) $\frac{8\pi}{13}$ কে ষাটমূলক পদ্ধতিতে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ কর।

সমাধান : (i) $45^o\,25'36'' = 45^o\left(25\frac{36}{60}\right)' = 45^o\left(25\frac{3}{5}\right)' = 45^o\left(\frac{128}{5}\right)'$

$$= \left(45\frac{128}{5\times60}\right)^o = \left(45\frac{32}{75}\right)^o = \left(\frac{3407}{75}\right)^o = \frac{3407}{75} \times \frac{\pi}{180} \text{ রেডিয়ান}$$

[$\therefore$ $1^o = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান]

$$= \frac{3407\pi}{13500} \text{ রেডিয়ান}$$

$= 0.7928$ রেডিয়ান ($\pi = 3.1416$ ধরে) প্রায়

(ii) $\frac{8\pi}{13}$ রেডিয়ান $= \frac{8\pi}{13} \times \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রি, [$\because$ $1^c = \frac{180^0}{\pi}$ রেডিয়ান]

$= \frac{1440}{13}$ ডিগ্রি $= 110^0 46' \,9.23''$

উদাহরণ ৩। একটি চাকার ব্যাসার্ধ 2 মি. 3 সে. মি. হলে, তার পরিধি আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান : এখানে ব্যাসার্ধ $= r =$ 2 মি. 3 সে. মি.= 203 সে. মি. = 2.03 মি.

$\therefore$ চাকার পরিধি $= 2\pi r = 2 \times \pi \times 2.03$ মিটার = 12.7549 মিটার (প্রায়)

উদাহরণ ৪। একটি চাকার পরিধি 1 মি. 65 সে. মি. হলে, তার ব্যাসার্ধ কত?

সমাধান : মনে করি, ব্যাসার্ধ $= r$ সে. মি.

$\therefore$ পরিধি $2\pi r$ সে. মি. = 1 মি. 65 সে. মি. = 165 সে. মি. = 1.65 মি.

$\therefore 2\pi r = 1.65$

বা, $r = \dfrac{1.65}{2\pi}$

$\therefore r = 0.2626$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ = 0.2626 মিটার।

উদাহরণ ৫। একটি গাড়ির চাকার ব্যাস 0.84 মি. এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ড 6 বার ঘোরে। গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান : চাকার ব্যাসার্ধ $r = \dfrac{084}{2}$ মি. = 0.42 মি.

$\therefore$ চাকার পরিধি $= 2\pi r = 2 \times \pi \times .42$ মি. = 2.6389 মি.

$\therefore$ চাকাটি একবার ঘুরে 2.6389 মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।

প্রতি সেকেন্ডে চাকাটি 6 বার ঘোরে।

সুতরাং 1 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব 2.6389×6 মি.

$\therefore$ 1 ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব $\dfrac{2.6 \times 6 \times 60 \times 60}{1000}$ কি. মি. = 57.0002 কি. মি.

$\therefore$ গাড়ির গতিবেগ ঘণ্টায় 57 কি. মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ৬। কোনো ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 2 ঃ 5 ঃ 3; বৃহত্তম কোণটিকে ষাটমূলক পদ্ধতিতে এবং ক্ষুদ্রতম কোণটিকে বৃত্তীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি, কোণ তিনটি $2x^o, 5x^o, 3x^o$;

তাহলে, $2x + 5x + 3x = 180$, ($\because$ তিন কোণের সমষ্টি 180^o)

বা, $10x = 180$ বা, $x = 18$

$\therefore$ বৃহত্তম কোণটি $5x^o = 5 \times 18^o = 90^o$

ক্ষুদ্রতম কোণটি $2x^o = 2 \times 18^o = 36^o = \dfrac{\pi}{180} \times 36 = \dfrac{\pi}{5}$ রেডিয়ান।

উদাহরণ ৭। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার হলে পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে $1'$ মিনিট কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব কত?

সমাধান : ব্যাসার্ধ $= r = 6440$ কি. মি.

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 1' = \frac{1}{60}$ ডিগ্রি $= \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore$ চাপের দৈর্ঘ্য $= s = r\theta = 6440 \times \frac{\pi}{60 \times 18}$ কি. মি. $= 1.87332$ কি. মি. (প্রায়)

$\therefore$ স্থানদ্বয়ের দূরত্ব 1.8733 কি. মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ৮। সকাল 9.30 মিনিটে ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।

সমাধান : 60 মিনিটে ঘড়ির মিনিটের কাঁটা 60 টি ঘর অতিক্রম করে এবং 60 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা 5 ঘর অতিক্রম করে। সুতরাং ঘণ্টার কাঁটা প্রতি মিনিটে $\frac{5}{60}$ বা $\frac{1}{12}$ ঘর অতিক্রম করে।

আবার ঘড়ির ডায়াল বা মুখপাত্রের 60 টি ঘর কেন্দ্রে চার সমকোণ বা 360° কোণ ধারণ করে।

$\therefore$ একটি ঘর কেন্দ্রে $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ কোণ ধারণ করে।

9.30 মিনিটের সময় মিনিটের কাঁটা 6 এর দাগে অবস্থান করে এবং ঘণ্টার কাঁটা 9 টার দাগ থেকে 30 মিনিটে $\frac{30}{12}$ বা $2\frac{1}{2}$ ঘর আগে সরে যায়। সুতরাং 9.30 মিনিটে দুইটি কাঁটার মধ্যে ব্যবধান (6 এর দাগ থেকে 9 এর দাগ পর্যন্ত) 15 ঘর $+ 2\frac{1}{2}$ ঘর $= 17\frac{1}{2}$ ঘর

1 ঘর কেন্দ্রে 6° কোণ ধারণ করে।

$\therefore 17\frac{1}{2}$ ঘর কেন্দ্রে ধারণ করে $17\frac{1}{2} \times 6^\circ = 105^\circ$.

অনুশীলনী-৮.১

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নের প্রশ্নগুলো সমাধান কর এবং প্রযোজ্য ক্ষেত্রে আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত মান উল্লেখ কর ($\pi = 3.1416$ ধরে)।

১। (ক) রেডিয়ানে প্রকাশ কর :

(i) $75^\circ 30'$ (ii) $45^\circ 25' 36''$ (iii) $60^\circ 6' 45''$ (iv) $30^\circ 12' 36'$

(খ) নিম্নলিখিত সময়ে বৃত্তাকার ঘড়ির কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যে কোণের পরিমাণ ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে প্রকাশ কর :

(i) 4টা 40 মি.। (ii) 3 টা (iii) 8 টা 20 মি.।

২। একটি কোণকে ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D° এবং R^c দ্বারা প্রকাশ করা হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

৩। একটি কোণের পরিমাণ ডিগ্রি ও রেডিয়ানে যথাক্রমে x, z হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{90} = \frac{2z}{\pi}$.

৪। একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত 3 ঃ 4 ঃ 5; কোণ তিনটির বৃত্তীয়মান কত?

৫। একটি ত্রিভুজের কোণগুলোর অনুপাত 2 ঃ 5 ঃ 3; এর বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয়মান নির্ণয় কর।

৬। একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণীভুক্ত এবং বৃহত্তর কোণটি ক্ষুদ্রতর কোণটির দ্বিগুণ। কোণগুলোকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

৭। একটি চাকা .88 কিলোমিটার পথ যেতে 20 বার ঘোরে। চাকাটির ব্যাসার্ধ কত?

৮। একটি চাকা 1.75 কিলোমিটার পথ যেতে 40 বার ঘোরে। চাকাটির ব্যাসার্ধ কত?

৯। একটি গাড়ির চাকার ব্যাস 56 সে. মি. এবং চাকা প্রতি সেকেন্ডে 7 বার ঘোরে। গাড়িটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত?

১০। একটি গাড়ির চাকার ব্যাস .70 মিটার এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 7 বার আবর্তিত হয়। গাড়িটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত তা নির্ণয় কর।

১১। এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 5 কি.মি. বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে এমন একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে, যা বৃত্তের কেন্দ্রে 56^o কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর।

১২। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে.মি., এর 11 সে.মি. দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

১৩। বৃত্তের ব্যাসার্ধ 176 সে.মি. হলে, যে চাপের কেন্দ্রস্থ সম্মুখকোণ $22\frac{1^o}{2}$ হয়, তার দৈর্ঘ্য কত?

১৪। যদি একটি বৃত্তচাপ 28 সে.মি. দীর্ঘ ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্রে 45^o কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্তচাপটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৫। একটি বালক সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 2 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে 28^o কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 180 মিটার হয়, তবে বালকটির গতিবেগ কত?

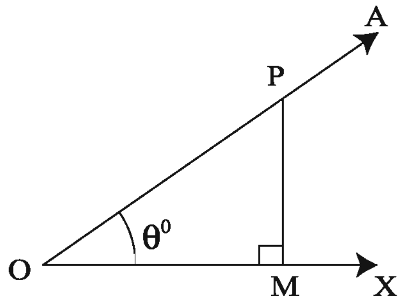
১৬। পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব 14.9×10^7 কিলোমিটর এবং পৃথিবীর কেন্দ্রবিন্দুতে সূর্যের ব্যাস $32'$ কোণ উৎপন্ন করে; সূর্যের ব্যাস কত?

১৭। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার হলে পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে $32''$ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব কত?

১৮। 540 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $7'$কোণ উৎপন্ন করলে পাহাড়টির উচ্চতা কত?

৮.৭। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

(ক) আমরা জানি যে, সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নিম্নোক্তভাবে বর্ণনা করা হয় :
অতিভুজ OP বিশিষ্ট POM সমকোণী ত্রিভুজে θ কোণের ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত হল –



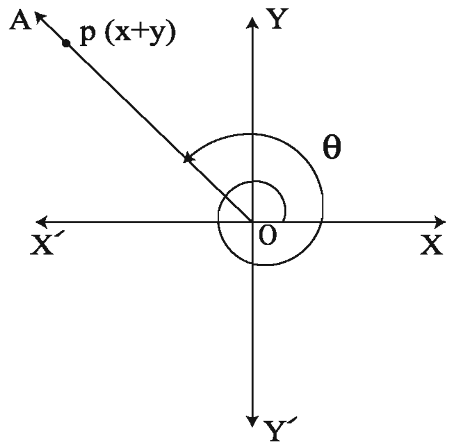
$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$, $\text{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$

$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$, $\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$

$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$, $\cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$

(খ) যেকোনো কোণের জন্য এরূপ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংজ্ঞায়িত করার জন্য কোণটির প্রমিত বা আদর্শ অবস্থান (standard position) বিবেচনা করতে হয়। স্থানাঙ্কায়িত সমতলের মূলবিন্দুতে ধনাত্মক x-অক্ষকে আদি রশ্মি করে কোণটি অঙ্কন করা হলেই তার প্রমিত অবস্থান পাওয়া যায়। মনে করি, θ একটি ত্রিকোণমিতিক কোণ।

মনে করি, X´OX রেখা x অক্ষ, Y´OY রেখা y অক্ষ এবং O বিন্দু মূলবিন্দু। মনে করি, ধনাত্মক x অক্ষ অর্থাৎ OX রশ্মি থেকে শুরু করে যথাযথ দিকে ও পরিমাণে ঘুরে ঘূর্ণায়মান রশ্মির OA অবস্থানে θ কোণ রেখা উৎপন্ন হয়েছে। এখানে, OX কোণটির আদি বাহু (initial side) এবং OA প্রান্তিক রশ্মি (terminal side)। প্রান্তিক বাহু OA এ মূলবিন্দু থেকে ভিন্ন কোনো বিন্দু P নিই। মনে করি, উভয় অক্ষে একই একক সাপেক্ষে P এর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং $|OP| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ । তাহলে θ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ হচ্ছে :



$\text{sine}\,\theta = \sin\theta = \frac{y}{r}$

$\text{cosine}\,\theta = \cos\theta = \frac{x}{r}$

$\text{tangent}\,\theta = \tan\theta = \frac{y}{x}$ (যদি $x \neq 0$ হয়)

$\text{cotangant}\,\theta = \cot\theta = \frac{x}{y}$ (যদি $y \neq 0$ হয়)

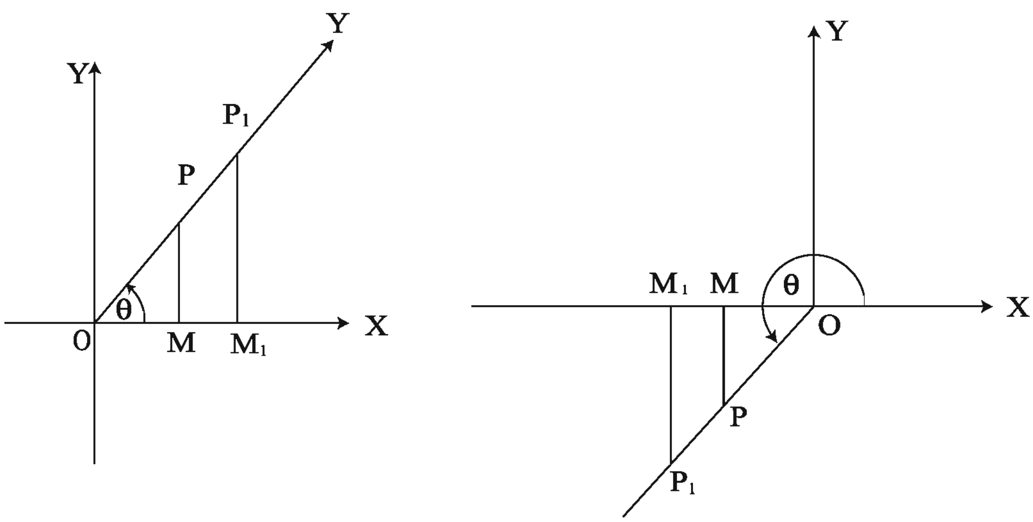
$\text{secant}\,\theta = \sec\theta = \frac{r}{x}$ (যদি $x \neq 0$ হয়)

$\text{cosecant}\,\theta = \text{cosec}\,\theta = \frac{r}{y}$ (যদি $y \neq 0$ হয়)

দ্রষ্টব্য ১। উপরের বর্ণনায় P বিন্দু O বিন্দু থেকে ভিন্ন বলে $r = |OP| > 0|$ সেজন্য $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ সবসময়ই অর্থবহ। প্রান্তিক বাহু OA যদি y অক্ষের উপর থাকে তবে $x = 0$ হয়, কারণ y অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর x স্থানাঙ্ক এরূপ কোণের জন্য $\tan\theta$ ও $\sec\theta$ সংজ্ঞায়িত নয়। প্রান্তিক বাহু OA যদি x অক্ষের উপর থাকে তবে $y = 0$ হয়, কারণ x অক্ষের উপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক 0; এরূপ কোণের জন্য $\cot\theta$ ও $\text{cosec}\,\theta$ সংজ্ঞায়িত নয়।

দ্রষ্টব্য ২। প্রান্তিক বাহু OA এর $P(x, y)$ বিন্দু ছাড়া অন্য একটি বিন্দু $P_1\ (x_1, y_1)$ নিয়ে এবং P ও P_1 থেকে x অক্ষের উপর PM ও P_1M_1 লম্ব টেনে দেখা যায় যে, ΔOPM ও ΔOP_1M_1 সদৃশ।

সুতরাং $\frac{OM}{OM_1} = \frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OP}{OP_1}$



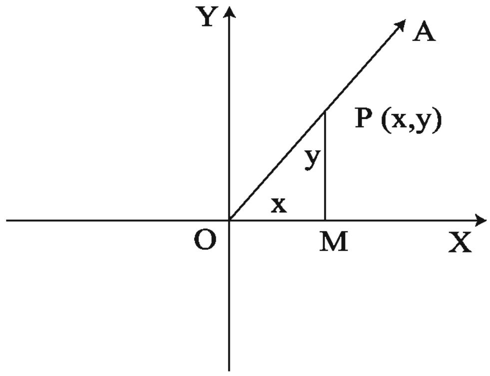
অর্থাৎ, $\frac{|x|}{|x_1|} = \frac{|y|}{|y_1|} = \frac{r}{r_1}$ যেখানে $OP = r$, $OP_1 = r_1$ তদুপরি x ও x_1 একই চিহ্নযুক্ত এবং y ও y_1 একই চিহ্নযুক্ত।

অতএব $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{r}{r_1}$,

সুতরাং $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y_1}{r_1}$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x_1}{r_1}$, $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$, ইত্যাদি। অর্থাৎ, ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান প্রান্তিক রশ্মি OA এর নির্বাচিত বিন্দু P এর উপর নির্ভর করে না।

দ্রষ্টব্য ৩। প্রত্যেক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত একটি বাস্তব সংখ্যা।

দ্রষ্টব্য ৪। θ সূক্ষ্মকোণ হলে প্রমিত অবস্থানে এর প্রান্তিক বাহু OA প্রথম চতুর্ভাগে পড়ে এবং $\theta = \angle XOA$ হয়। OA বাহুতে যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ নিয়ে এবং P থেকে OX এর উপর PM লম্ব টেনে দেখা যায় যে, $OM = x$, $PM = y$।
সুতরাং $OP = r$ ধরে (ক) ও (খ) থেকে θ কোণের অনুপাতগুলোর একই মান পাওয়া যায়।



৮.৮। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক

পূর্ব অনুচ্ছেদে বর্ণিত সংজ্ঞা থেকে দেখা যায় যে,

$$\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta} \qquad \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

যখন সমতাগুলোর উভয় পক্ষ অর্থবহ হয়।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত সহজ অভেদাবলী

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

পূর্ব অনুচ্ছেদ থেকে, $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

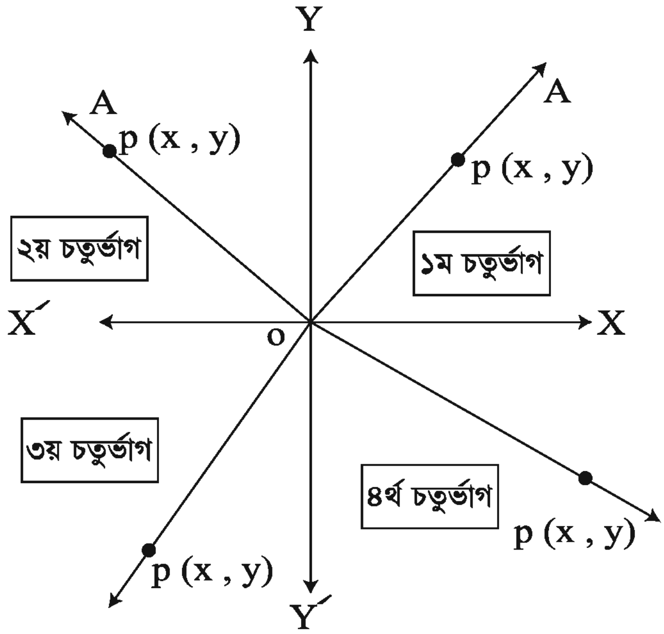
ফলে $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ এবং $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

(ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

(iii) $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$.

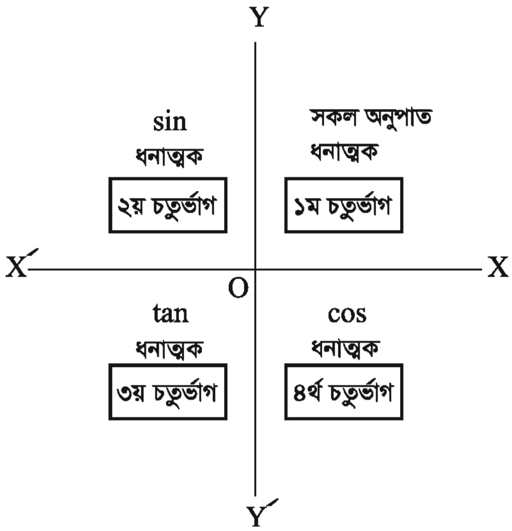
৮.৯। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্নের চতুর্ভাগ নিয়ম



উপরের চিত্রে, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কায়িত সমতলকে চারটি চতুর্ভাগে ভাগ করেছে। এদের ক্রম সম্পর্কে ইতোপূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। আদি অবস্থান OX থেকে একটি রশ্মি OA এর ঘূর্ণনের ফলে তার বিভিন্ন প্রান্তিক অবস্থানের উপর উৎপন্ন কোণের পরিমাণ নির্ভর করে। মনে করি, OA এর উপর যেকোনো P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) এবং $OP = r$. প্রান্তিক বাহু OA এর এবং সেই সঙ্গে P বিন্দুর বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থান পরিবর্তনের সঙ্গে x, y এর চিহ্ন পরিবর্তন হলেও r কে সব সময়ই ধনাত্মক ধরা হয়।

যখন OP রশ্মি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে, তখন x, y, r সকলেই ধনাত্মক। সুতরাং তাদের সকল অনুপাত ধনাত্মক। তাই প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত কোণের সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক। যখন OP রশ্মি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে, তখন x ঋণাত্মক, y এবং r ধনাত্মক। সুতরাং দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত কোণের x বর্জিত অনুপাত অর্থাৎ sin ও cosec অনুপাত দুইটি ধনাত্মক, অন্যান্য সব অনুপাত ঋণাত্মক। যখন OP রশ্মি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে, তখন x, y উভয়েই ঋণাত্মক এবং r ধনাত্মক। সুতরাং তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত কোণের tan ও cot অনুপাত দুইটি ধনাত্মক, অন্যান্য সব অনুপাত ঋণাত্মক। যখন OP রশ্মি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে তখন y ঋণাত্মক, x ও r ধনাত্মক। সুতরাং চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত কোণের cos এবং sec অনুপাত দুইটি ধনাত্মক, অন্যান্য সব অনুপাত ঋণাত্মক।

উপরোক্ত আলোচনার সারাংশ নিম্নের চিত্রে দেখান হল : এর সাহায্যে কোনো কোণের প্রান্তিক রশ্মির অবস্থানের উপর নির্ভর করে তার ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় সহজ হবে।



৮.১০। কতিপয় বিশেষ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মাধ্যমিক জ্যামিতির দ্বাদশ অধ্যায়ের সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের আলোচনায় আমরা দেখেছি যে,

(ক) 30° বা $\frac{\pi}{6}$ কোণের অনুপাতসমূহ :

$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

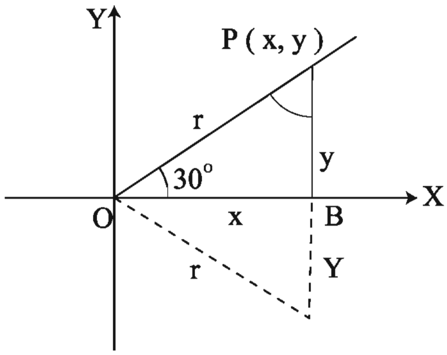
$\cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 30^\circ = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\sec 30^\circ = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\text{cosec}\, 30^\circ = \text{cosec}\,\frac{\pi}{6} = 2.$



$r = 2y$
$r^2 = x^2+y^2$

(খ) 45° বা $\frac{\pi}{4}$ কোণের অনুপাতসমূহ :

$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

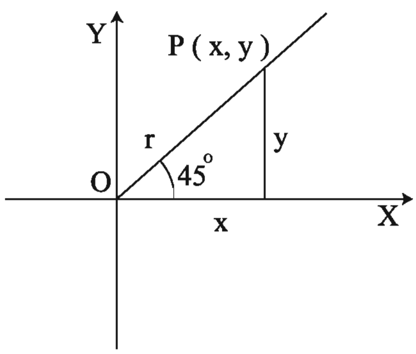
$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = 1$

$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\text{cosec}\, 45^\circ = \text{cosec}\,\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$



$x = y$
$r^2 = x^2+y^2$

(গ) 60° বা $\frac{\pi}{3}$ কোণের অনুপাতসমূহ :

$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

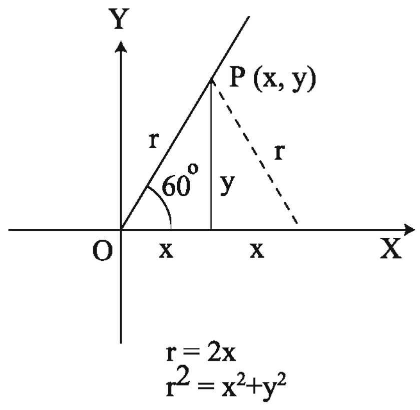
$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$\cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2$

$\text{cosec}\ 60^\circ = \text{cosec}\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.



ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সাধারণ সংজ্ঞা থেকে 0° ও 90° কোণের অনুপাতসমূহ সহজেই নির্ণয় করা যায়।

(ঘ) 0° কোণের অনুপাতসমূহ :

এক্ষেত্রে প্রান্তিক রশ্মি OA আদি রশ্মি OX এর উপরই থাকে। সুতরাং OA রশ্মির যেকোনো P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, O) এবং $r = OP = x$

সুতরাং $\sin 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$

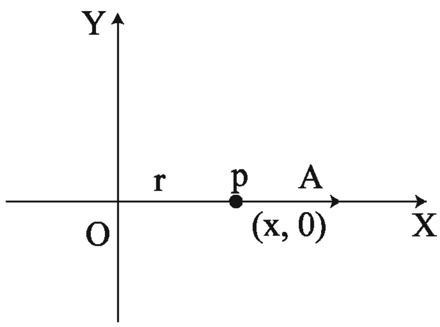
$\cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1$

$\tan 0^\circ = \frac{0}{r} = 0$

$\cot 0^\circ = \frac{x}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত

$\sec 0^\circ = \frac{r}{x} = \frac{r}{r} = 1$

$\text{cosec}\ 0^\circ = \frac{r}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত।



(ঙ) 90° বা $\frac{\pi}{2}$ কোণের অনুপাতসমূহ :

এক্ষেত্রে প্রান্তিক বাহু OA এর অবস্থান ধনাত্মক y অক্ষ OY এর ওপর থাকে। সুতরাং OA বাহুর যেকোনো বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (0, y) এবং $r = op = y$

সুতরাং $\sin 90^\circ = \sin\frac{\pi}{2} = \frac{y}{r} = \frac{r}{r} = 1$

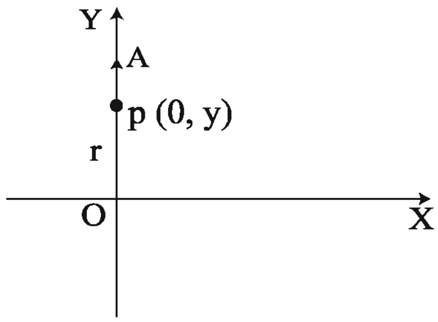
$\cos 90^\circ = \cos\frac{\pi}{2} = \frac{0}{r} = 0$

$\tan 90^\circ$ বা $\tan\frac{\pi}{2} = \frac{y}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত

$\cot 90^\circ = \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{y} = 0$

$\sec 90^\circ$ বা $\sec\frac{\pi}{2} = \frac{r}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত

$\text{cosec}\ 90^\circ = \text{cosec}\frac{\pi}{2} = \frac{r}{y} = \frac{y}{y} = 1$.



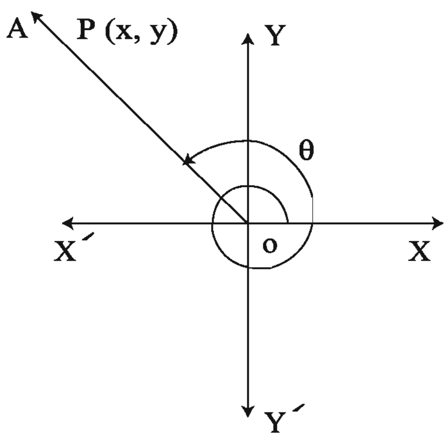
ব্যবহারের সুবিধার্থে 0°, 30°, 45°, 60°, 90° কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ছক আকারে নিম্নে দেওয়া হল :

কোণ	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

দ্রষ্টব্য : এই ছকের sin ও cosine অনুপাতের মান সহজে মনে রাখার জন্য নিম্নোক্ত নিয়মটি বিশেষ সহায়ক :

0, 1, 2, 3, 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেককে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলো বর্গমূল করলে 0°, 30°, 45°, 60°, 90° কোণগুলোর sin অনুপাতের মান পাওয়া যায়। আবার sin অনুপাতগুলোর মান উল্টাক্রমে সাজিয়ে লিখলে cos অনুপাতগুলোর মান পাওয়া যায়। $\sin 0^\circ$, $\sin 30^\circ$, $\sin 45^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\sin 90^\circ$ অনুপাতগুলোর মান যথাক্রমে $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}$ সংখ্যাগুলোর বর্গমূল অর্থাৎ $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1$ এবং $\cos 0^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\cos 90^\circ$ অনুপাতগুলোর মান যথাক্রমে $1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0$.

৮.১১। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সীমাবদ্ধতা



যে কোনো θ কোণের প্রমিত অবস্থানে প্রান্তিক বাহুর কোন P এর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

অর্থাৎ $x^2 + y^2 = r^2$

$\therefore\ x^2 \le r^2$ এবং $y^2 \le r^2$

সুতরাং $|x| \le r$ এবং $|y| \le r$

অর্থাৎ $-r \le x \le r$ এবং $-r < y \le r$

সুতরাং $\frac{x}{r}$ এবং $\frac{y}{r}$ অর্থাৎ $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান -1 ও +1 এর মধ্যবর্তী। যেহেতু x বা y কখনই r অপেক্ষা বৃহত্তর নয়, তাই $\sin\theta$ বা $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর বা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। তাই $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$; সুতরাং $\sec\theta$ এবং $\text{cosec}\theta$ এর মান ≥ 1 অথবা ≤ -1. কিন্তু $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ এর মানের এমন কোনো সীমা নির্ধারণ করা যায় না।

৮.১২। কতিপয় উদাহরণ

উদাহরণ ১। প্রমাণ কর : $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \dfrac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}$

সমাধান : বামপক্ষ $= \dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} - 1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} - \dfrac{1}{\cos\theta} + 1} = \dfrac{\sin\theta + 1 - \cos\theta}{\sin\theta - 1 + \cos\theta}$

$$= \frac{(\sin\theta + 1 - \cos\theta)(\sin\theta + 1 - \cos\theta)}{(\sin\theta - 1 + \cos\theta)(\sin\theta + 1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta + 1 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta - (1 - \cos\theta)^2}$$

$$= \frac{(\sin\theta + 1)^2 + \cos^2\theta - 2\cos\theta(1 + \sin\theta)}{\sin^2\theta - (1 + \cos^2\theta - 2\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + 1 + 2\sin\theta + \cos^2\theta - 2\cos\theta(1 + \sin\theta)}{\sin^2\theta - 1 - \cos^2\theta + 2\cos\theta}$$

$$= \frac{2(1 + \sin\theta) - 2\cos\theta(1 + \sin\theta)}{-\cos^2\theta - \cos^2\theta + 2\cos\theta}$$

$$= \frac{2(1 + \sin\theta)(1 - \cos\theta)}{2\cos\theta(1 - \cos\theta)}$$

$$= \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}.$$

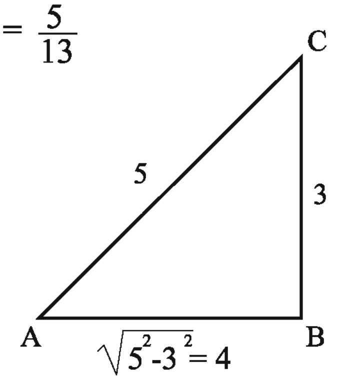
উদাহরণ ২। যদি $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{12}{13}$ হয় এবং A, B ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\sin A = \frac{3}{5}$, $\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = 1 - \frac{9}{25} = \frac{4}{5}$

$\cos B = \frac{12}{13}$, $\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \frac{5}{13}$

$\therefore \tan A = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$ এবং $\tan B = \frac{5}{13} \div \frac{12}{13} = \frac{5}{12}$

$$\therefore \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{56}{33}$$



চিত্র – ১

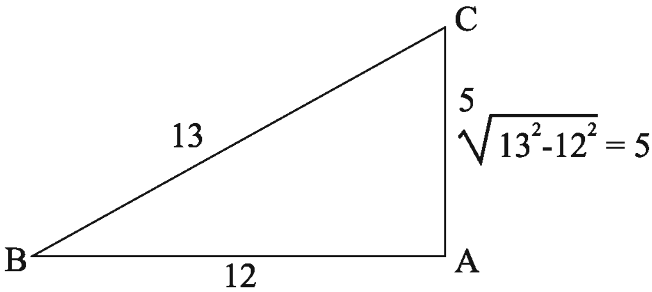
বিকল্প সমাধান

$\tan A = \frac{3}{4}$ [চিত্র -১]

$\tan B = \frac{15}{12}$ [চিত্র - ২]

$$\therefore \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{56}{33}$$



চিত্র – ২

উদাহরণ ৩। সরল কর : $\frac{1 - \sin^2 30^0}{1 + \sin^2 45^0} \times \frac{\cos^2 60^0 + \cos^2 30^0}{\operatorname{cosec}^2 90^0 - \cot^2 90^0} \div (\sin 60^0 \tan 30^0)$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1 - 0} \div \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 1 \times 2 = 1.$$

উদাহরণ ৪। যদি $\sin\theta + \cos\theta = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sin\theta - \cos\theta = \pm 1$

সমাধান : যেহেতু $\sin\theta + \cos\theta = 1$ $\therefore (\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1$

বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1$ বা, $1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta = 0$

এখন, $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 4\sin\theta\cos\theta$

$= 1^2 - 0 = 1$

$\therefore \sin\theta - \cos\theta = \pm 1.$

অনুশীলনী-৮.২

নিম্নলিখিত অভেদগুলো প্রমাণ কর ঃ

১। $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A.$

২। $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}}.$

৩। $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A.$

৪। $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta.$

৫। $\tan^2 A + \cot^2 A + 2 = \sec^2 A \operatorname{cosec}^2 A.$

৬। $4\tan^2 A + 3 = 3\sec^2 A + \tan^2 A.$

৭। $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + \cot A} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - \cot A} = 2\operatorname{cosec} A.$

৮। $(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1.$

৯। $\dfrac{\sec A - \sec B}{\tan B + \tan A} = \dfrac{\tan A - \tan B}{\sec A + \sec B}.$

১০। $\cos A = \dfrac{12}{13}$ এবং A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে $\tan A + \operatorname{cosec} A$ এর মান নির্ণয় কর।

১১। যদি $\operatorname{cosec} A = \dfrac{a}{b}$ যেখানে $a > b > 0$ হয় তবে দেখাও যে, $\tan A = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$

১২। $\cot A + \operatorname{cosec} A = 3$ হলে, $\cos A =$ কত?

১৩। $2\sin A = 2 - \cos A$ হলে, $\sin A =$ কত?

১৪। যদি $\sin A + \sin^2 A = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\cos^2 A + \cos^4 A = 1.$

১৫। $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে, দেখাও যে, $\tan\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

১৬। যদি $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta.$

১৭। যদি $2\sin\alpha + 15\cos^2\alpha = 7$ এবং $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ হয় তবে $\cot\alpha$ এর মান নির্ণয় কর।

১৮। $\sec\theta + \tan\theta = 2$ হলে, $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

১৯। $\tan\theta = \frac{x}{y}$ হলে, $\frac{x \sin\theta + y \cos\theta}{x \sin\theta - y \cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

২০। $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

২১। যদি $\tan\theta + \sin\theta = m$, $\tan\theta - \sin\theta = n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$.

২২। $a \cos\theta - b \sin\theta = c$ হলে, দেখাও যে, $a \sin\theta + b \cos\theta = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$.

মান নির্ণয় কর :

২৩। $\sin^2 30^0 + \cos^2 45^0 + \tan^2 60^0$.

২৪। $3\tan^2 45^0 - \sin^2 60^0 - \frac{1}{2} \cot^2 30^0 + \frac{1}{3} \sec^2 45^0$.

২৫। $\tan^2 \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{6} \tan^2 \frac{\pi}{3}$.

২৬। $\frac{1 + 2\sin 60^0 \cos 60^0}{\sin 60^0 + \cos 60^0} + \frac{1 - 2\sin 60^0 \cos 60^0}{\sin 60^0 - \cos 60^0}$.

২৭। $\frac{\tan 60^0 - \tan 30^0}{1 + \tan 60^0 \tan 30^0} + \cos 60^0 \cos 30^0 + \sin 60^0 \sin 30^0$.

২৮। $A = 60^0, B = 30^0$ হলে, নিম্নলিখিত সূত্রগুলোর সত্যতা যাচাই কর :

(i) $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

(ii) $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$.

(iii) $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

(iv) $\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$.

(v) $\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$.

(vi) $\tan 2B = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$.

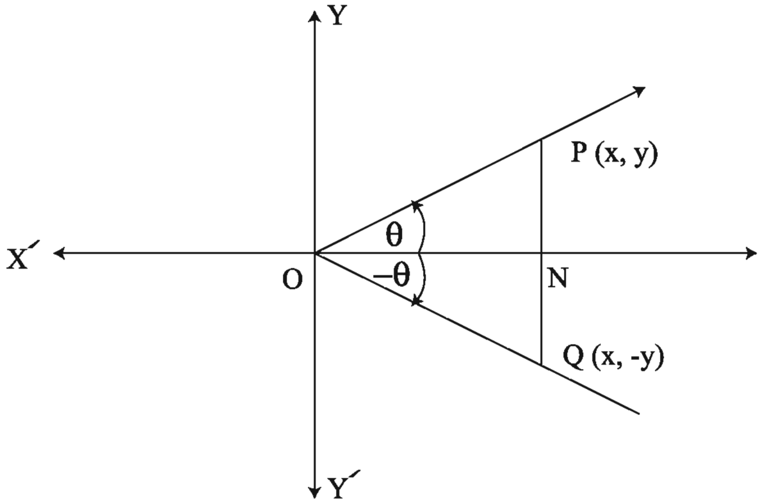
(vii) $\cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = 2 \cos^2 B - 1 = \cos^2 B - \sin^2 B$.

৮.১৩। $(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত $(0^0 < \theta < 90^0)$

কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মিরেখা তার আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle XOQ = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। OP রশ্মির যেকোনো P বিন্দু থেকে OX এর উপর PN লম্ব অঙ্কন করা হল এবং PN কে বর্ধিত করলে তা OQ কে Q বিন্দুতে ছেদ করল। $\angle ONQ$ সমকোণ হওয়ায় QN, x অক্ষের উপর লম্ব হল।

মনে করি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y), তা হলে $x > 0, y > 0$ এবং $ON = x, PN = y$

এখানে,



OPN এবং OQN সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle PON = \angle QON$, $\angle ONP = \angle ONQ$ এবং ON বাহু সাধারণ। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ PN = NQ এবং OP = OQ

যেহেতু Q এর y স্থানাঙ্ক ঋণাত্মক।

$\therefore$ Q (x , - y)

$\sin(-\theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$, যেখানে OP = OQ = r (ধরি)

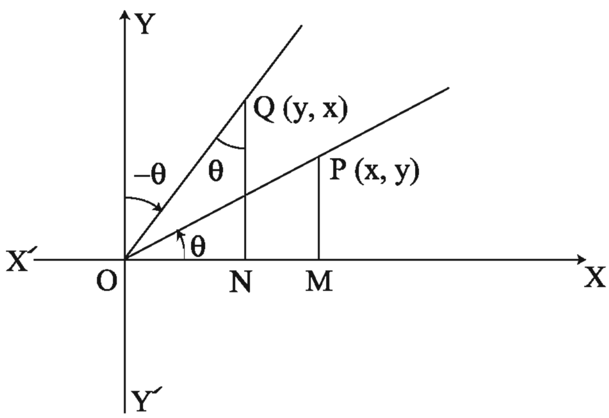
$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan\theta$

$\therefore \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta;\ \sec(-\theta) = \sec\theta;\ \cot(-\theta) = -\cot\theta.$

উদাহরণ। $\sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ$, $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ$, $\tan(-45^\circ) = -\tan 45^\circ$ ইত্যাদি।

৮.১৪। $(90^\circ - \theta)$ কোণ বা 'পূরক কোণের' ত্রিকোণমিতিক অনুপাত $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$



কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার আদি অবস্থান OX রেখা থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। একই দিকে অপর একটি রশ্মি ঘুরে $\angle XOY = 90^o$ উৎপন্ন করার পর OY অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle YOQ = - \theta$ উৎপন্ন করে। তাহলে $\angle XOQ = 90^o + (-\theta) = 90 - \theta$, OP এবং OQ সমান ধরে P ও Q থেকে X অক্ষের উপর লম্ব PM ও Q N আঁকি।

মনে করি, $OP = r$ এবং P এর স্থানাঙ্ক (x, y)

এখন POM ও QON ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$\angle OMP = \angle ONQ, \angle POM = \angle OQN$ এবং $OP = OQ$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

$|ON| = |PM| = y$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক (y, x)

$\therefore \sin (90^o - \theta) = \frac{x}{r} = \cos \theta$

$\cos (90^o - \theta) = \frac{y}{r} = \sin \theta$

$\tan (90^o - \theta) = \frac{x}{y} = \cot \theta$

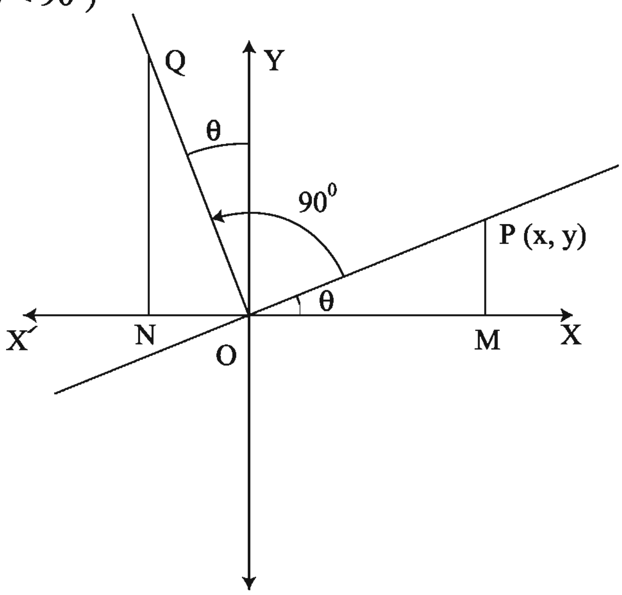
$\therefore \text{cosec} (90^o - \theta) = \sec\theta; \sec (90^o - \theta) = \text{cosec}\theta; \cot (90^o - \theta) = \tan \theta.$

উদাহরণ : $\sin 60^o = \sin (90^o - 30^o) = \cos 30^o, \tan 30^o = \tan (90^o - 60^o) = \cot 60^o$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য : θ এবং $90^o- \theta$ কোণ দুইটি পরস্পর পূরক। তাদের একটির sine অপরটি cosine, একটির tangent অপরটির cotangent এবং একটির secant অপরটির cosecant এর সমান। তাই $90^o- \theta$ কোণের কোনো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের জন্য ঐ অনুপাতের গোড়ায় co থাকলে সেটা উঠিয়ে দিয়ে এবং co না থাকলে co সংযোজন করে $90^o- \theta$ এর স্থলে θ বসিয়ে দিলেই উদ্দিষ্ট অনুপাত পাওয়া যায়। এই নিয়মটি মনে রাখলে $90^o- \theta$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় সহজ হয়।

৮.১৫। $(90^o + \theta)$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত $(0^o < \theta < 90^o)$

কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 90^o$ উৎপন্ন করে। তাহলে $\angle XOQ = 90^o + \theta$ ।



মনে করি, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y)। OP এবং OQ সমান ধরে নিয়ে P ও Q থেকে x অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব আঁকি।

$\therefore \angle POM = \angle NQO = \theta$

$\angle PMO = \angle QNO, OP = OQ$

$\therefore$ OMP ও QNO ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$|NQ| = |OM| = x$ এবং $|ON| = |MP| = y$

$\therefore$ Q এর স্থানাঙ্ক $(-y, x)$

$\therefore \sin(90^\circ + \theta) = \frac{x}{r} = \cos\theta$

$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$

$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{x}{-y} = -\cot\theta$

$\text{cosec}(90^\circ + \theta) = \sec\theta$; $\sec(90^\circ + \theta) = -\text{cosec}\theta$; $\cot(90^\circ + \theta) = -\tan\theta$.

উদাহরণ। $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$, $\text{cosec}\, 120^\circ = \text{cosec}(90^\circ + 30^\circ) = \sec 30^\circ$ ইত্যাদি।

৮.১৬। (ক) $(180^\circ + \theta)$ (খ) $(180^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$

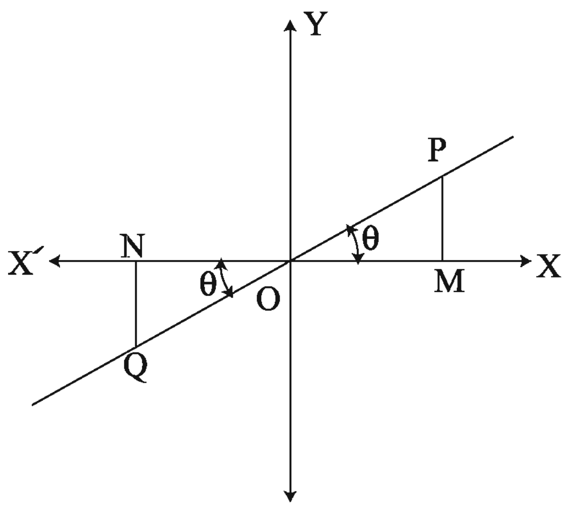
পূর্ববর্তী তিনটি অনুচ্ছেদের জ্যামিতিক পদ্ধতি $(180^\circ - \theta)$ এবং $(180^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা যায়। আবার, ঐ সব অনুচ্ছেদে প্রমাণিত সূত্রগুলো প্রয়োগ করেও অভীষ্ট অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা যায়। নিচে প্রধান তিনটি ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের জন্য প্রযোজ্য সূত্রগুলো উল্লেখ করে শেষোক্ত পন্থায় এগুলো প্রমাণ করা হল।

(ক) $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$

$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\theta$

প্রমাণ : $(180^\circ + \theta)$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, যেখানে $180^\circ < \theta < 270^\circ$



কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ এবং একই দিকে আরও ঘুরে $\angle POQ = 180^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে, প্রবৃদ্ধ $\angle XOQ = (180^\circ + \theta)$।

মনে করি,

$OP = OQ = r$, P এর স্থানাঙ্ক (x, y)

এবং $\angle NOQ = \theta$

OMP এবং ONQ ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে -

$\angle OMP = \angle ONQ$, $\angle MOP = \angle NOQ$

এবং $OP = OQ$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore |PM| = |QN|$ এবং $|OM| = |ON|$

$\therefore$ Q এর স্থানাঙ্ক $(-x, -y)$

$\therefore \sin(180^\circ + \theta) = \frac{-y}{r} = -\sin\theta$

$\cos(180^\circ + \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$

$\tan(180^\circ + \theta) = \frac{-y}{-r} = \tan\theta$

উদাহরণ : $\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ$, $\tan 240^\circ = \tan (180^\circ - 60^\circ) = \tan 60^\circ$ ইত্যাদি।

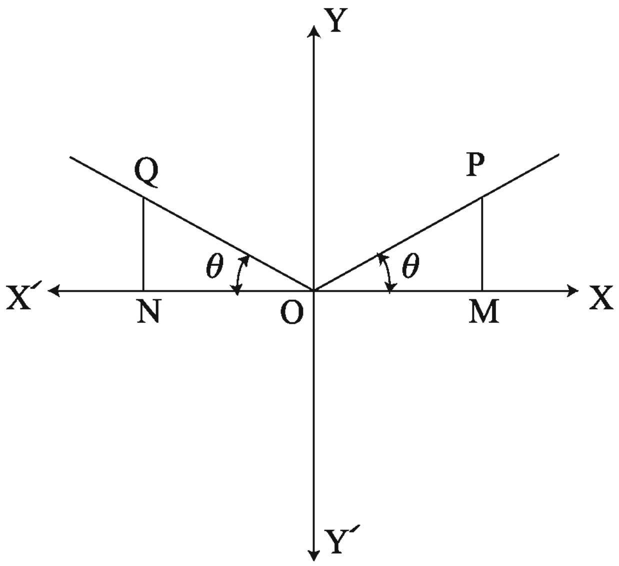
দ্রষ্টব্য ১। উপরোক্ত সংযুক্ত কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত θ এর সকল মানের জন্য সত্য।

(খ) $\sin (180^\circ - \theta) = \sin\theta$

$\cos (180^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$\tan ((180^\circ - \theta) = -\tan\theta$.

প্রমাণ : $(180^\circ - \theta)$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, যেখানে $90^\circ < \theta < 180^\circ$



কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি তার আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। একই দিকে আরও একটি রশ্মি ঘুরে $\angle XOX' = 180^\circ$ কোণ উৎপন্ন করার পর OX′ অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle X'OQ = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে

$\angle XOQ = 180^\circ + (-\theta) = 180^\circ - \theta$

মনে করি,

$OP = OQ = r$, P এর স্থানাঙ্ক (x, y)

এবং $\angle NOQ = \theta$

OMP এবং ONQ ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$\angle OMP = \angle ONQ$, $\angle MOP = \angle NOQ$

এবং $OP = OQ$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

$\therefore |PM| = |QN|$ এবং $|OM| = |ON|$

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-x, y)$

$\therefore \sin (180^\circ - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$

$\cos (180^\circ - \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$

$\tan (180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\tan\theta$

উদাহরণ। $\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ$, $\sec 120^\circ = \sec (180^\circ - 60^\circ) = -\sec 60^\circ$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য ২ : θ এবং $180^\circ - \theta$ কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক। সম্পূরক কোণের sine সমান ও একই চিহ্নবিশিষ্ট, কিন্তু cosine সমান হলেও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

৮.১৭। $(270^\circ \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত যেখানে $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

(ক) $\sin (270^\circ - \theta) = \sin \{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\sin (90^\circ - \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ - \theta) = \cos\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = -\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta$

$\tan(270^\circ - \theta) = \tan\{180^\circ + (90^\circ - \theta)\} = \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$

$\therefore$ $\text{cosec}(270^\circ - \theta) = -\sec\theta$, $\sec(270^\circ - \theta) = -\text{cosec}\theta$

$\cot(270^\circ - \theta) = \tan\theta$.

(খ) $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ + \theta) = -(-\sin\theta) = \sin\theta$

$\tan(270^\circ + \theta) = -\cot\theta$

$\therefore$ $\text{cosec}(270^\circ + \theta) = \text{cosec}\theta$

$\cot(270^\circ + \theta) = \tan\theta$.

৮.১৮। $(360^\circ \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত যেখানে $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

প্রমিত (বা আদর্শ) অবস্থান $(360^\circ - \theta)$ এবং $(360^\circ + \theta)$ কোণটি যথাক্রমে $(-\theta)$ এবং θ কোণের সঙ্গে মিলে যায়। সুতরাং $(360^\circ - \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক যেকোনো অনুপাত $(-\theta)$ কোণের সংশ্লিষ্ট ঐ অনুপাতের সমান এবং $(360^\circ + \theta)$ কোণের যেকোনো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত θ কোণের সংশ্লিষ্ট অনুপাতের সমান। অতএব,

(ক) $\sin(360^\circ - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(360^\circ - \theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(360^\circ - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$.

(খ) $\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta$

$\cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta$

$\tan(360^\circ + \theta) = \tan\theta$.

৮.১৯। $(n \times 90^\circ \pm \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

যেকোনো ত্রিকোণমিতিক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো সাধারণভাবে নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়।

(১) প্রদত্ত কোণকে এরূপ দুইটি অংশে ভাগ করতে হবে যার একটি অংশ সূক্ষ্মকোণ এবং অপর অংশ 90° বা $\frac{\pi}{2}$ বা এক সমকোণের n গুণিতক। ধরি, প্রদত্ত কোণকে $(n.\frac{\pi}{2} \pm \theta)$ আকারে প্রকাশ করা হল।

(২) (ক) n জোড় সংখ্যা হলে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ধরন অপরিবর্তিত থাকবে। যেমন sin অনুপাত sin থাকবে। cos থাকলে sin হবে, cot থাকলে tan হবে ইত্যাদি।

(খ) n বিজোড় সংখ্যা হলে sine, tangent, secant অনুপাত যথাক্রমে cosine, cotangent, cosecant–এ পরিবর্তিত হবে। একইভাবে cosine, cotangent, cosecant যথাক্রমে sine, tangent, secant–এ পরিবর্তিত হবে।

এবং নিচের নিয়মে প্রত্যেক ক্ষেত্রে পরিবর্তিত অনুপাতের সঠিক চিহ্ন বসাতে হবে।

(৩) $(n.\frac{\pi}{2} \pm \theta)$ কোণটির অবস্থান কোন চতুর্ভাগে সেটা নির্ণয় করার পর ঐ চতুর্ভাগে প্রদত্ত অনুপাতের যে চিহ্ন (৮.৯ অনুচ্ছেদের নিয়মে) সেই চিহ্ন ২ (ক) অথবা (খ) থেকে নিরূপিত অনুপাতের পূর্বে বসাতে হবে।

উদাহরণ। (ক) $\sin (7. \frac{\pi}{2} \pm \theta)$ কোণের ক্ষেত্রে $n = 7$, বিজোড় সংখ্যা, সুতরাং sin অনুপাত পরিবর্তিত হয়ে cos হবে, আবার $(7. \frac{\pi}{2} \pm \theta)$ কোণটি অষ্টম বা চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে। চতুর্থ চতুর্ভাগে sin এর চিহ্ন ঋণাত্মক।

$\therefore \sin (7. \frac{\pi}{2} + \theta) = - \cos\theta$

আবার $(7. \frac{\pi}{2} - \theta)$ কোণটি সপ্তম বা তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং ঐ চতুর্ভাগে sin ঋণাত্মক।

$\therefore \sin (7. \frac{\pi}{2} + \theta) = - \cos\theta$

(খ) $\tan (22 \times \frac{\pi}{2} \pm \theta)$ কোণের ক্ষেত্রে $n = 22$ জোড় সংখ্যা। সুতরাং tan অনুপাত tan–ই থাকবে।

আবার $22 \times \frac{\pi}{2} + \theta$ কোণটি 23তম চতুর্ভাগে বা তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং তৃতীয় চতুর্ভাগে tan ধনাত্মক।

$\therefore \tan (22 \times \frac{\pi}{2} + \theta) = \tan\theta$

আবার $22 \times \frac{\pi}{2} - \theta$ কোণটি 22তম চতুর্ভাগে বা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে এবং দ্বিতীয় চতুর্ভাগে tan ঋণাত্মক।

$\therefore \tan (22 \times \frac{\pi}{2} - \theta) = - \tan\theta.$

৮.২০। ত্রিকোণমিতিক সারণী ও তার ব্যবহার

দ্বিতীয় ও তৃতীয় অধ্যায়ে $0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, n\frac{\pi}{2}$ এবং $n\frac{\pi}{2} + \theta$ কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। কিন্তু $32^o, 43^o, 67^o, 71^o, 40'$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের জন্য ত্রিকোণমিতিক সারণী বা ক্যালকুলেটর ব্যবহার করতে হবে। এই পুস্তকের শেষে সংযোজিত ত্রিকোণমিতিক সারণীতে দেখা যায় যে, সর্ববামের কলামে ডিগ্রি এবং পরবর্তী ছয়টি কলামে এর $0', 10', 20', 30', 40', 50'$ জন্য অনুপাতের মান দেওয়া আছে। $\sin 19^o$ এর মান দেখতে হলে sine সারণীতে $19^o0'$ দেখতে পাওয়া যায় $\sin 19^o0' = 0.32557$ এবং একই পদ্ধতিতে সারণী থেকে $\sin 61^o40' = 0.88020$; একই পদ্ধতিতে ট্যানজেন্ট সারণী থেকে $\tan 43^o20' = 0.94345$। পুস্তকে সংযোজিত ত্রিকোণমিতিক সারণীর মধ্যে কেবলমাত্র sin ও tan সারণী আছে। cos, cot বা অন্যান্য সারণী নাই।

$\cos 44^o 50'$ এর মান নির্ণয় পদ্ধতি নিম্নরূপ :

$\cos 44^o 50' = \cos (90^o - 45^o 10') = \sin 45^o 10' = 0.70916$

অনুরূপভাবে, $\cot 44^o 50' = \cot (900 - 45^o 10') = \tan 45^o 10' = 1.00583.$

উদাহরণ ১। $\sin 1260^o, \cos 990^o, \cot 1980^o, \tan (- 630^o)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান : $\sin 1260^o = \sin 14. \frac{\pi}{2} = 0$, কারণ 14 জোড় সংখ্যা।

$\cos 990^o = \cos (11 \frac{\pi}{2} + 0) = \sin 0^o = 0$, কারণ, 11 বিজোড় সংখ্যা

$\cot 1980^o = \cot (22 \frac{\pi}{2} + 0) = \cot 0^o$, অসংজ্ঞায়িত

$\tan(-630^\circ) = -\tan(7\frac{\pi}{2} + 0) = \cot 0^\circ$, অসংজ্ঞায়িত।

উদাহরণ ২। দেখাও যে, $\cos 306^\circ + \cos 234^\circ + \cos 162^\circ + \cos 18^\circ = 0.$

সমাধান : বামপক্ষ $= \cos(270^\circ + 36^\circ) + \cos(270^\circ - 36^\circ) + \cos(180^\circ - 18^\circ) + \cos 18^\circ$

$= \sin 36^\circ - \sin 36^\circ - \cos 18^\circ + \cos 18^\circ = 0.$

উদাহরণ ৩। মান নির্ণয় কর : $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}.$

সমাধান :

প্রদত্ত রাশি $= \tan 15^\circ \tan 75^\circ \tan 105^\circ \tan 165^\circ$

$= \tan 15^\circ \tan(90^\circ - 15^\circ) \tan(90^\circ + 15^\circ) \tan(180^\circ - 15^\circ)$

$= \tan 15^\circ \cot 15^\circ (-\cot 15^\circ)(-\tan 15^\circ)$

$= 1.$

উদাহরণ ৪। মান নির্ণয় কর : $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$.

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $\sin^2\frac{\pi}{7} + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}$

$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}\right) = 2.$

উদাহরণ ৫। $O^\circ \le \theta \le 90^\circ$ হলে $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান : $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

বা, $6\sin^2\theta - 3\sin\theta - 8\sin\theta + 4 = 0$

বা, $3\sin\theta(2\sin\theta - 1) - 4(2\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(2\sin\theta - 1)(3\sin\theta - 4) = 0$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ অথবা, $\frac{4}{3}$

কিন্তু $\sin\theta = \frac{4}{3}$ অসম্ভব, $\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

$\therefore \theta = 30^\circ.$

উদাহরণ ৬। $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ হলে $5\operatorname{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\operatorname{cosec}\theta - 2 = 0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান : $5\operatorname{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\operatorname{cosec}\theta - 2 = 0$

বা, $\frac{5}{\sin^2\theta} - \frac{7\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2 = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2\sin^2\theta = 0$

বা, $5-7\cos\theta - 2(1-\cos^2\theta) = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$ অথবা, 3; কিন্তু $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos(360^\circ - 300^\circ)$

$\therefore \theta = 60^\circ, 300^\circ.$

উদাহরণ ৭। $0^\circ < \theta < 90^\circ$ হলে ত্রিকোণমিতিক সারণী ব্যবহার করে $4\cos^2\theta = 10 - 11\sin\theta$ সমীকরণটি সমাধান কর।

সমাধান : $4\cos^2\theta = 10 - 11\sin\theta$

বা, $4(1-\sin^2\theta) = 10 - 11\sin\theta$

বা, $4\sin^2\theta - 11\sin\theta + 6 = 0$

বা, $(4\sin\theta - 3)(\sin\theta - 2) = 0$

$\therefore \sin\theta = \frac{3}{4}$ বা 2; কিন্তু $\sin\theta = 2$ হতে পারে না।

$\therefore \sin\theta = \frac{3}{4} = .7500$

সারণী থেকে $\sin 48^\circ 30' = .7490$, $\sin 48^\circ 40' = 0.7509$

$\therefore 10'$ এর জন্য পার্থক্য .0019

$\sin\theta = .7500$, $\sin 48^\circ 30' = .7490 \therefore \theta > 48^\circ 30'$

মনে করি, $\theta = 48^\circ 30' + x'$

$\therefore x = \frac{10}{.0019} \times (.7500 - .7490) = \frac{100}{19} = 5.26'$ (প্রায়)

$\therefore \theta = 48^\circ 30' + 5.26' = 48^\circ 35.26'$ (প্রায়)।

অনুশীলনী-৮.৩

১। মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 930^\circ$ (ii) $\cos 690^\circ$ (iii) $\cot 765^\circ$ (iv) $\tan(-1575^\circ)$

(v) $\sec(-1500^\circ)$ (vi) $\operatorname{cosec}(-1125^\circ)$ (vii) $\operatorname{cosec} 19\frac{\pi}{3}$ (viii) $\cot\left(3\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

(ix) $\cos\left(5\frac{\pi}{2} - \frac{19\pi}{3}\right)$ (x) $\cos(990^\circ + \theta)$ (xi) $\cot(\theta - 11700)$

(xii) $\tan 16200$ (xiii) $\operatorname{cosec} 8100$ (xiv) $\cos 13500$.

২। n একটি পূর্ণ সংখ্যা হলে,

(i) $\sin\frac{n\pi}{4}$ (ii) $\tan\ n\pi + \frac{\pi}{6}$

(iii) $\cos\left\{(2n+1)\ \pi + \frac{\pi}{3}\right\}$

(iv) $\cot\left\{(2n+1)\ \pi + \frac{\pi}{4}\right\}$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। সরল কর :

(i) $\frac{\cos(90^\circ + \theta)\sec(-\theta)\tan(180^\circ - \theta)}{\sec(360^\circ + \theta)\sin(180^\circ + \theta)\cot(90^\circ - \theta)}$

(ii) $\cot(A - 270^\circ)\ \text{cosec}(A + 630^\circ)\sec A$

(iii) $\frac{\sin(540^\circ + A)\cos(1080^\circ - A)\tan(195^\circ + A)}{\cot(285^\circ + A)\sin(-A)\cot(180^\circ - A).}$

৪। মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin 22^\circ + \cos 25^\circ + \sin 202^\circ + \cos 155^\circ + \cos 300^\circ$

(ii) $\cos 405^\circ + \cos 225^\circ + \sin 155^\circ - \sin 25^\circ$

(iii) $\frac{\tan 215^\circ + \sin 335^\circ}{\cos 425^\circ + \cot 125^\circ}$

(iv) $\cot\frac{\pi}{20}\ \cot\frac{3\pi}{20}\ \cot\frac{5\pi}{20}\ \cot\frac{7\pi}{20}\ \cot\frac{9\pi}{20}$

৫। দেখাও যে,

(i) $\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ)\sin(-330^\circ) = 1$

(ii) $\sin 780^\circ \cos 390^\circ - \sin 330^\circ \cos(-300^\circ) = 1$

(iii) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\cos\ (\pi - \theta)\cot\ \frac{3\pi}{2} + \theta\ = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)\ \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).$

৬। (i) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

(ii) $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$.

৭। মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}$

(ii) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

(iii) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

(iv) $\cos^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{16\pi}{15} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$.

৮। $A = 60^\circ$ হলে, নিম্নলিখিত সূত্রগুলোর সত্যতা যাচাই কর :

(i) $\sin 2A = 2\sin A \cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(iii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iv) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(v) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$.

৯। সমাধান কর : $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

(i) $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$

(ii) $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}$

(iii) $2\sin^2\theta = 3\cos\theta$

(iv) $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

(v) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2$

(vi) $\operatorname{cosec}\theta \cot\theta = 2\sqrt{3}$

(vii) $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

(viii) $\sec\theta + \cos\theta = \dfrac{5}{2}$

(ix) $\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(x) $\sec\theta + \tan\theta = \sqrt{3}$

(xi) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$.

১০। θ এর মান নির্ণয় কর :

(i) $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$

(ii) $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$, $360^\circ < \theta < 540^\circ$

(iii) $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $360^\circ < \theta < 720^\circ$.

১১। $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$ শর্ত সাপেক্ষে নিম্ন সমীকরণগুলো সমাধান করে θ এর সম্ভাব্য সকল মান নির্ণয় কর :

(i) $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

(ii) $3(\sec^2\theta + \tan^2\theta) = 5$

(iii) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

(iv) $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$.

(v) $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$

(vi) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

(vii) $1 - 2\sin\theta - 2\cos\theta + \cot\theta = 0$

(viii) $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$.

১২। ত্রিকোণমিতিক সারণী বা ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে সমাধান কর :

(i) $5\sin x + 2\cos x = 5$

(ii) $7\cos\theta - 1 = 5\sin^2\theta$.

১৩। ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে দেখাও যে,

(i) $\sin(A+B) - \cos(A+B) = \sin C + \cos C$

(ii) $\tan(A + B) - \tan(B + C) = \tan A - \tan C$

(iii) $\sin(A + B) + \sin(B + C) + \sin(C + A) = \sin A + \operatorname{Sin} B + \sin C$

(iv) $\operatorname{Sin}\frac{A+B}{2} + \tan\frac{A+B}{2} = \operatorname{Cos}\frac{C}{2}(1 + \operatorname{cosec}\frac{C}{2})$.

১৪। ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রে দেখাও যে,

(i) $\sin\frac{1}{2}(A + B) = \sin\frac{1}{2}(C + D)$

(ii) $\sin(B + C + D) + \sin(B + C + D + 2A) = 0$.

১৫। ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হলে দেখাও যে,

(i) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$

(ii) $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$.

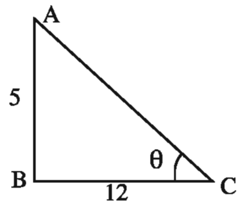
বহুনির্বাচনী প্রশ্ন :

১। $\text{Sin}A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং $B = 15^0$ হলে, $\frac{\tan A\text{-}\tan B}{1+\tan A \tan B}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ. 1

গ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ঘ. $\sqrt{3}$

২। পাশের চিত্র অনুসারে



i. $\sin\theta = \frac{5}{13}$

ii. $\tan\theta = \frac{12}{13}$

iii. $\sec^2\theta = \frac{25}{144}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i ও iii খ. i ও ii

গ. ii ও iii ঘ. i, ii ও iii

৩। $\cot 240^0$ এর মান কত?

ক. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

গ. $\sqrt{3}$ ঘ. 1

৪। $\sin A = \frac{1}{4}$ হলে sec2A এর মান কোনটি?

ক. $\frac{7}{8}$ খ. $\frac{8}{7}$

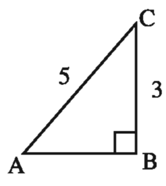
গ. $\frac{3}{4}$ ঘ. $\frac{4}{3}$

৫। $\text{Cos}\,\theta + \text{Sin}\,\theta = \sqrt{2}$ হলে θ এর মান নিচের কোনটি ?

ক. 30^0 খ. 45^0

গ. 60^0 ঘ. 75^0

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৬–৮ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও :



৬। $\angle A$ সূক্ষ্মকোণ বিবেচনায় ভূমির দৈর্ঘ্য কত একক?

ক. 3 খ. 4

গ. 5 ঘ. 2

৭। tanA + tanC এর মান নিচের কোনটি?

ক. $\frac{25}{12}$ খ. $\frac{12}{25}$

গ. $\frac{16}{25}$ ঘ. $\frac{25}{16}$

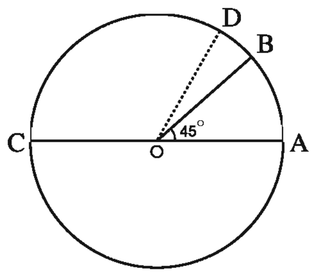
৮। cosA + sinA এর মান cosA এর মানের কতগুণ।

ক. $\frac{7}{5}$ খ. $\frac{4}{5}$

গ. $\frac{4}{7}$ ঘ. $\frac{7}{4}$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১।



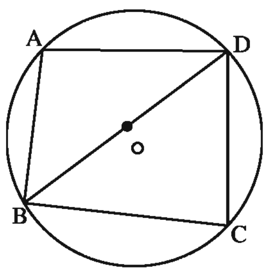
চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকার ব্যাস AC = 70 সে.মি.

ক. AB চাপের দৈর্ঘ্য 35 সে.মি হলে, ∠A0B এর মান কত? বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় কর।

খ. চিত্রে ∠A0D = 45^0 হলে, AD চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 7 বার আবর্তিত হলে, চাকাটির গতিবেগ ঘন্টায় কত কিলোমিটার হবে?

২। চিত্রে 0 কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ এবং ব্যাস BD = 10 সে.মি।



ক. Sin $\frac{1}{2}$ (A+C) এর মান নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, cosA+cosB+cosC+cosD = tanA+tanB+tanC+tanD

গ. বৃত্তটিকে BD এর চতুর্দিকে ঘুরালে যে ঘনবস্তুটি উৎপন্ন হয় তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সারণী - ১
সাইন সারণী

	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0.0000	0.0029	0.0058	0.0087	0.0116	0.0145
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320
2	.0350	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494
3	.0523	.0552	.0581	.0611	.0640	.0669
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0844	.0848
5	0.0872	0.0901	0.0930	0.0959	0.0987	0.1016
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.1334	.1363
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536
9	.1594	.1598	.1622	.1651	.1679	.1708
10	0.1737	0.1765	0.1794	0.1822	0.1851	0.1880
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221
13	.2250	.2278	.2306	.2335	.2363	.2391
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2531	.2560
15	0.2588	0.2616	0.2644	0.2672	0.2700	0.2728
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3063
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228
19	.3256	.3893	.3311	.3338	.3308	.3393
20	0.3420	0.348	0.34475	0.3502	0.3529	0.3557
21	.3584	.3612	.3638	.3665	.3692	.3719
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881
23	.3907	.3934	.3961	.3988	.4014	.4041
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4473	.4200

সারণী - ১
সাইন সারণী

	0′	10′	20′	30′	40′	50′
25	0.4226	0.4253	0.4277	0.4305	0.4331	0.4358
26	.4384	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514
27	.4540	.4566	.4592	.4618	.4643	.4670
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975
30	0.5000	0.5025	0.5050	0.5075	0.5100	0.5125
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275
32	.5299	.5324	.5848	.5373	.5398	.5422
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5569
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712
35	0.5736	0.5760	0.5783	0.5807	0.5831	0.5854
36	.5878	.5901	.5925	.5943	.5972	.5992
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406
40	0.6428	0.6450	0.6472	0.6495	0.6517	0.6539
41	.6561	.6588	.6604	.6686	.6648	.6670
42	.6691	.6718	.6734	.6756	.6777	.6799
43	.6820	.6841	.6862	.6883	.6905	.6926
44	.6247	.6968	.6988	.7009	.7030	.7051

সারণী - ১
সাইন সারণী

	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45	0.7071	0.7091	0.7112	0.7133	0.7153	0.7173
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412
48	.7431	.7451	.7471	.7490	.7509	.7528
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7612
50	0.7660	0.7679	0.7698	0.7716	0.7735	0.7753
51	.7772	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7967
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175
55	0.8192	0.8208	0.8225	0.8241	0.8258	0.8274
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371
57	.8387	.8403	.8419	.8434	.8450	.8465
58	.8481	.8496	.8511	.8526	.8545	.8557
59	.8572	.8587	.8602	.8616	.8630	.8645
60	0.8660	0.8675	0.8690	0.8704	0.8718	0.8732
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816
62	.8830	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897
63	.8910	.8923	.8935	.8950	.8962	.8975
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051
65	0.9063	0.9075	0.9088	0.9100	0.9112	0.9123
66	.9136	.9147	.9159	.9171	.9182	.9194
67	.9205	.9216	.9228	.9239	.9250	.9261
68	.9272	.9283	.9294	.9304	.9315	.9325
69	.9336	.9346	.9357	.9367	.9377	.9387

সারণী - ১
সাইন সারণী

	0′	10′	20′	30′	40′	50′
70	0.9397	0.9407	0.9417	0.9426	0.9436	0.9446
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9446	.9555
73	.9563	.9572	.9587	.9588	.9596	.9605
74	.9613	.9621	.9629	.9636	.9644	.9652
75	0.9669	0.9667	0.9674	0.9682	0.9689	0.9696
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775
78	.9782	.9788	.9793	.9799	.9805	.9811
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9839	.9813
80	0.9848	0.9853	0.9858	0.9863	0.9868	0.9872
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922
83	.9926	.9929	.9932	.9935	.9938	.9942
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959
85	0.9962	0.9964	0.9967	0.9969	0.9971	0.9971
86	.9975	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985
87	.9986	.9988	.9989	.9991	.9992	.9003
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998
89	.9999	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000
90	1.0000					

ট্যানজেন্ট সারণী

	0	10	20	30	40	50
0	0.0000	0.0030	0.0058	0.0087	0.0116	0.0146
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320
2	.0349	.0378	.0407	.0437	.0466	.0495
3	.0524	.0553	.0582	.0712	.0641	.0670
4	.0699	.0729	.0758	.0797	.0816	.0346
5	0.0874	0.0904	0.0934	0.0963	0.0992	0.1022
6	.1051	.1081	.1110	.1139	.1199	.1198
7	.1229	.1257	.1287	.1317	.1346	.1379
8	.1405	.1435	.1465	.1495	.1524	.1554
9	1584	.1614	.1944	.1973	.1703	.1733
10	0.1763	0.1793	0.1823	0.1853	0.1884	0.1913
11	.1944	.1974	.2005	.2035	.2065	.2094
12	.2126	.2156	.2186	.2217	.2248	.2275
13	.2309	.2339	.2370	.2401	.2432	.2468
14	.2493	.2524	.2552	.2586	.2617	.2642
15	0.2680	0.2711	0.2742	0.2773	0.2805	0.2836
16	.2868	.2899	.2931	.2992	.2964	.3026
17	.3057	.3089	.3121	.3153	.3186	.3217
18	.3249	.3281	.3314	.3346	.3368	.3411
19	.3443	.3476	.3509	.3541	.3574	.3607
20	0.3640	0.3673	0.3706	0.3739	0.3772	0.3805
21	.3839	.3872	.3906	.3939	.3973	.4020
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4211
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4418
24	.4352	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628

ট্যানজেন্ট সারণী

	0	10	20	30	40	50
25	0.4663	0.4699	0.4734	0.4770	0.4806	0.4841
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059
27	.5095	.5132	.5167	.5206	.5243	.5280
28	.5317	.5355	.5392	.5430	.5467	.5505
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735
30	0.5774	0.5812	0.5851	0.5891	0.5930	0.5969
31	.6069	.6045	.6088	.6128	.6168	.6203
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453
33	6496	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703
34	.6745	.6788	.6830	.6873	.6616	.6959
35	0.7002	0.7046	0.7089	0.7133	0.7177	0.7221
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490
37	.7536	.7581	.7627	.7673	.7720	.7766
38	.7813	.7860	.7907	.7954	.8002	.8050
39	.8098	.8146	.8195	.8243	.8292	.8342
40	0.8391	0.8441	0.8491	0.8541	0.8591	0.8642
41	.8693	.8744	.8796	.8847	.8899	.8952
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.6217	.9271
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601
44	.9657	.9713	.9770	.9827	.9884	.9942

ট্যানজেন্ট সারণী

	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0236	1.0295
46	1.0355	1.0416	1.0477	1.0536	1.0599	1.0661
47	1.0724	1.0786	1.0850	1.0913	1.0977	1.1041
48	1.1106	1.1171	1.1237	1.1303	1.1370	1.1436
49	1.1504	1.1572	1.1640	1.1709	1.1778	1.1847
50	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276
51	1.2349	1.2423	1.2497	1.2572	1.2647	1.2723
52	1.2799	1.2876	1.2954	1.3032	1.2647	1.3190
53	1.3270	1.3351	1.3432	1.3514	1.3594	1.3680
54	1.3764	1.3848	1.3934	1.4020	1.4106	1.4193
55	1.4281	1.4370	1.4460	1.4550	1.4641	1.473
56	1.4826	1.4919	1.5013	1.5108	1.5204	1.530
57	1.5399	1.5497	1.5597	1.5697	1.5798	1.5900
58	1.6003	1.6107	1.6213	1.6319	1.6426	1.6534
59	1.6643	1.6753	1.6864	1.6977	1.7090	1.7205
60	1.7321	1.7437	1.7556	1.7675	1.7796	1.7917
61	1.8040	1.8105	1.8291	1.8418	1.8546	1.8676
62	1.8807	1.8940	1.9074	1.9210	1.8347	1.9486
63	1.9626	1.9768	1.9912	2.0057	2.0204	2.0353
64	2.0503	2.0655	2.0809	2.0965	2.0023	2.1283
65	2.1445	2.1609	2.1775	2.1943	2.2113	2.2286
66	2.2460	2.2637	2.2817	2.2998	2.3183	2.3369
67	2.3559	2.3750	2.3945	2.4142	2.4342	2.4545
68	2.4751	2.4951	2.5172	2.5396	2.5605	2.5826
69	2.6051	2.6281	2.6511	2.6746	2.6985	2.7228

ট্যানজেন্ট সারণী

	0′	10′	20′	30′	40′	50′
70	2.7475	2.7725	2.7980	2.8239	2.8502	2.8770
71	2.9042	2.9319	2.9600	2.9887	3.0178	3.0475
72	3.0777	3.1084	3.1397	3.1716	3.2041	3.2371
73	3.2709	3.3052	3.3402	3.3759	3.4124	3.4495
74	3.4874	3.5261	3.5656	3.6059	3.6470	3.6891
75	3.7321	3.7760	3.8208	3.8667	3.9136	3.9617
76	4.0108	4.0611	4.1126	4.1653	4.2153	4.2747
77	4.3315	4.3897	4.4493	4.5107	4.5736	4.6382
78	4.7046	4.7729	4.4830	4.9162	4.9894	5.0658
79	5.1446	5.2257	5.3093	5.3955	5.4845	5.5764
80	5.6713	5.7694	5.8708	5.9758	6.0844	6.1970
81	6.3134	6.4348	6.5606	6.6912	6.8269	6.9682
82	7.1154	7.2687	7.4287	7.5958	7.7704	7.9530
83	8.1443	8.3450	8.5555	8.7769	9.0093	9.2553
84	9.5144	9.7882	10.078	10.385	10.712	11.059
85	11.430	11.826	12.251	12.706	13.177	13.716
86	14.301	14.924	15.605	16.350	17.169	18.075
87	19.081	20.206	21.470	22.604	24.542	26.423
88	28.636	31.242	34.368	38.188	42.964	49.104
89	57.290	68.750	85.940	114.59	171.89	343.77

উত্তরমালা

অনুশীলনী-১

১। সমকোণী ত্রিভুজ	২। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ	৩। সমকোণী ত্রিভুজ
৪। $77^o, 103^o, 77^o, 103^o$	৫। $84^o, 96^o, 84^o, 96^o$	৬। $100^o, 80^o, 100^o, 80^o$
৭। 6 মি.	৮। 102^o	৯। 7 সে.মি.
১০। 23 সে. মি. বা 7 সে. মি.	১১। (খ)	১২। 180^o
১৩। (i)	১৪। (ক)	১৫। (খ)
১৬। 8 সে. মি	১৭। (গ)	১৮। 3 সে. মি., 11 সে. মি.

১৯। হবে।

২০। (ক) যখন কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
(খ) যখন কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি বা বিয়োগফলের সমান।

২১। 3, 2, 4 সে. মি.

২২। (ক) দুইটি (খ) চারটি (গ) তিনটি (ঘ) একটি (ঙ) একটিও নয়।

২৩। 50^o	২৪। 60^o	২৫। 60^o.

অনুশীলনী-৬

১। (ক) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $AD = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

(খ) $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{CA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} + \frac{4}{3}\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CF}$

(গ) $\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE})$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}$.

অনুশীলনী- ৭.২

১। 636 ব. মি., 20.5 মি. 864 ঘ. মি. ২। 162 ঘ. মি., 11.2 মি. (প্রায়) ৩। 1 ঘ. মি., 7.8 ব. মি. ৪। 300 ব. সে. মি. (প্রায়) ৫। 8.75 মি., 3.2 মি. ৬। 13.86 সে. মি. (প্রায়) 512 ঘ. সে. মি. (প্রায়) ৭। 3432.5 বর্গ সে. মি. (প্রায়) ৮। 3 সে. মি. 5.3 সে. মি. ৯। 188. 4956 ব. সে. মি. (প্রায়) 282.7 ব. সে. মি. (প্রায়) ১০। 1800.7 সে. মি. (প্রায়) ১১। 188.5 ব. সে. মি. (প্রায়), 301.6 ঘ. সে. মি. (প্রায়) ১২। 25 সে. মি. (প্রায়) ১৩। 91.63 ঘ. সে. মি. (প্রায়) ১৪। 452.39 বর্গ সে. মি. (প্রায়), 904.8 ঘ. সে. মি. (প্রায়) ১৫। 1 সে. মি. ১৬। 11.37 সে. মি. (প্রায়) ১৭। 1.06 সে. মি. (প্রায়) ১৮। 4 টি ১৯। 4 সে. মি. ২০। 1308.82 ঘ. সে. মি. (প্রায়) ২১। 21.98 সে. মি. (প্রায়) ২২। 78.5 ব. সে. মি. (প্রায়) ২৩। 7.48 ব. মি. (প্রায়) টা. 107.74 ২৪। 83800 টি। ২৫। 16 সে. মি., 12 সে. মি. 12 সে. মি. ২৬। 2096.49 ব. মি. (প্রায়) ২৭। 0.21 ঘ. মি. (প্রায়)।

অনুশীলনী-৮.১

১। (ক) (i) 1.3176 (ii) 0.7929 (iii) 1.0493 (iv) 0.5272 (রেডিয়ান)।

(খ) (i) $100^0, \frac{5\pi}{9}$ (ii) $90^0, \frac{\pi}{2}$ (iii) $130^0, 13\frac{\pi}{18}$.

৪। $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$ ৫। $\frac{\pi}{2}$ ৬। $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$ ৭। 7 মিটার (প্রায়) ৮। 7 মিটার (প্রায়) ৯। ঘণ্টায় 4433 কি. মি. (প্রায়) ১০। 55.42 কি. মি. (প্রায়) ১১। 102.3 মিটার (প্রায়) ১২। 90^0 (প্রায়) ১৩। 69.12 সে.মি. (প্রায়) ১৪। 22 সে. মি. (প্রায়) ১৫। সেকেন্ডে 22 মিটার (প্রায়) ১৬। 13.87×10^5 কি. মি. (প্রায়) ১৭। 1 কি. মি. (প্রায়) ১৮। 1.1 কি. মি. (প্রায়)।

অনুশীলনী-৮.২

১০। $\frac{181}{60}$ ১২। $\frac{4}{5}$ ১৩। 1 বা $\frac{3}{5}$ ১৭। $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ বা $\frac{3}{4}$ ১৮। $\frac{1}{2}$ ১৯। $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

২৩। $\frac{15}{4}$ ২৪। $\frac{17}{12}$ ২৫। $\frac{3}{2}$ ২৬। $\sqrt{3}$ ২৭। $\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

অনুশীলনী-৮.৩

১। (i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) 1 (iv) 1 (v) 2 (vi) - 2 (vii) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (viii) $-\sqrt{3}$ (ix) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (x) $\sin\theta$

(xi) $-\tan\theta$ (xii) 0 (xiii) 1 (xiv) 0.

২। (i) চক্রাকারে $0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pm 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ ইত্যাদি (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\pm\frac{1}{2}$ (iv) 1.

৩। (i) - 1 (ii) $\sec^2 A \tan A$ (iii) $-\sin A$.

৪। (i) 12 (ii) 0 (iii) - 1 (iv) 1 ৬। (i) 110 ৭। (i) 2 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 2. ৯। (i) 30° (ii) 45° (iii) 60° (iv) 30° (v) 60° (vi) 30° (vii) 30° বা 60° (viii) 60° (ix) 45° (x) 60° (xi) 30° (xii) 0° বা 60°. ১০। (i) 300° (ii) 480° (iii) 675°. ১১। (i) 45°, 135°, 225°, 315°, (ii) 30°, 150°, 210°, 330°. (iii) 45°, 135°, 225°, 315° (iv) 60°, 180°, 300° (v) 30°, 150°, (vi) 120°, 240° (vii) 30°, 135°, 150°, 315° (viii) 60°, 120°. ১২। (i) x = 90° বা 46.24′ (প্রায়) (ii) θ = 53°8′ (প্রায়)।

২০১০
শিক্ষাবর্ষ

শিক্ষা ও জ্ঞান অর্জনের মাধ্যমেই জীবনে সাফল্য অর্জন করতে হবে
– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

আপনাকে বড় বলে বড় সে নয়
লোকে তারে বড় বলে বড় সে হয়

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
ঢাকা বাংলাদেশ

২০১০ শিক্ষাবর্ষ থেকে সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য